आंचलिक गणित ओलम्पियाड - 2026

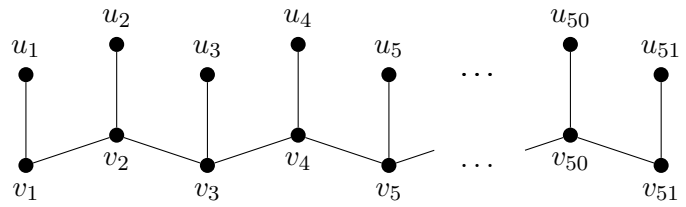
समय: 3 घंटे **15 नवम्बर 2026**

निर्देश:

- **आपको अपने साथ पैमाना और प्रकार ले जाने की अनुमति है।**
- **सभी प्रश्न बराबर अंकों के हैं। अधिकतम अंक: 102**
- **बिना तर्क के उत्तर देने पर कोई अंक नहीं दिए जाएंगे।**
- **सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।**
- **हर प्रश्न का उत्तर एक नए पेज से शुरू करें। अपना उत्तर देने के पहले प्रश्न संख्या साफ-साफ लिखें।**

1. मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है जिसके लिए $AB = AC$ है। बिन्दु D रेखाखंड BC का मध्य बिन्दु है और बिन्दु P रेखाखंड AB पर एक ऐसा बिन्दु है जिसके लिए $\angle CPA < 90^\circ$ है। अगर बिन्दु Q ($\neq P$) त्रिभुज BPC के परिवृत्त पर एक ऐसा बिन्दु है जिसके लिए $\angle AQC = 90^\circ$ तो सिद्ध करें कि $\angle DQP = 90^\circ$ होगा।

2. नीचे एक चित्र दिया गया है जिसके 102 शीर्ष हैं :



दिखाइए कि इन 102 शीर्षों $u_1, u_2 \ldots, u_{51}, v_1, v_2, \ldots, v_{51}$ के लिए $1, 2, \ldots, 102$ तक की संख्याएं इस तरह निर्धारित की जा सकती हैं कि किन्हीं भी दो शीर्षों के लिए समान संख्या ना हो, और संलग्न शीर्षों की निर्धारित संख्याओं के बीच का निरपेक्ष अंतर $1, 2, \ldots, 101$ तक की संख्याओं का ही पुनर्निर्धारण हो। (ऊपर दिए चित्र में कोई दो बिन्दु अगर एक रेखाखंड के माध्यम से जुड़े हैं तो उन्हें संलग्न कहेंगे।)

3. सिद्ध करें कि किन्हीं दो वास्तविक संख्याओं x और y के लिए,

$$\left(x^6 - x^2 + 3\right)\left(y^6 - y^2 + 3\right) > 2\left(x^2 + y^2\right)^2.$$

4. मान लीजिए ABC एक न्यूनकोण त्रिभुज है, और बिन्दु M और N क्रमश: रेखाखंड AB और AC के मध्य बिन्दु हैं। यह भी मान लें कि बिन्दु T वह बिन्दु है जिस पर किरण NM त्रिभुज ABC के परिवृत्त को प्रतिच्छेदित करती है और भुजा AC बिन्दु A पर त्रिभुज ATM के परिवृत्त को स्पर्श करती है। अगर बिन्दु S भुजा AB पर बिन्दु C से डाले गए लम्ब का पाद है तो AS/SB का मान पता करें।

5. मान लीजिए a एक ऐसा पूर्णांक है जिसका मान 1 से बड़ा है। ऐसे सभी धन पूर्णांक b पता कीजिए जिनका गुण है कि ऐसा धन पूर्णांक n मिल सकता है जिसके लिए $a^n + b$ पूर्णांक $a^b + 1$ से भाज्य है।

6. मान लीजिए n एक नियत धन पूर्णांक है और S एक नियत धन वास्तविक संख्या है। ऐसा न्यूनतम अचर c (S, n के पदों में) पता कीजिए जिसके लिए:

   ऐसी धन वास्तविक संख्याओं $a_1, a_2, \ldots, a_n$ जिनके लिए $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S$ हो, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ की ऐसी पुनर्व्यवस्था $b_1, b_2, \ldots, b_n$ मिल सकती है जिसके लिए

$$(a_1 + b_1) + (a_2^2 + b_2^2) + \cdots + (a_n^n + b_n^n) \leq c.$$

---------00000---------