आंचलिक गणित ओलम्पियाड - 2026

समय: 3 घंटे **15 नवम्बर 2026**

निर्देश:

- **आपको अपने साथ पैमाना और प्रकार ले जाने की अनुमति है।**
- **सभी प्रश्न बराबर अंकों के हैं। अधिकतम अंक: 102**
- **बिना तर्क के उत्तर देने पर कोई अंक नहीं दिए जाएंगे।**
- **सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।**
- **हर प्रश्न का उत्तर एक नए पेज से शुरू करें। अपना उत्तर देने के पहले प्रश्न संख्या साफ-साफ लिखें।**

1. एक न्यूनकोण विषमबाहु त्रिभुज ABC के संदर्भ में तीन बिन्दु दिए गए हैं: शीर्ष A, लम्बकेन्द्र H और भुजा BC का मध्य बिन्दु M। तर्क के साथ बताइए कि पैमाने और प्रकार की सहायता से त्रिभुज ABC की रचना कैसे करेंगे?

2. एक पूर्णांक $n \geq 2$ को अच्छा कहा जाता है अगर किन्हीं n अशून्य पूर्णांकों $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (जिनका अलग-अलग होना अनिवार्य नहीं है) के लिए
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 0$$
हो, तो ऐसे पूर्णांक $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$ मिलते हैं जिससे कि लघुत्तम समापवर्त्य $\gcd(a_i, a_j) > 1$ हो। ऐसे सभी अच्छे पूर्णांक पता कीजिए।

3. मान लीजिए त्रिभुज ABC एक ऐसा समद्विबाहु त्रिभुज है जिसके लिए $AB = AC$ और $\angle BAC = 80°$है। अगर बिन्दु P त्रिभुज ABC के अंदर एक ऐसा बिन्दु है जिसके लिए $\angle PAB = 10°$ और $\angle PCB = 20°$तो सिद्ध कीजिए कि $PA = PB$ होगा।

4. ऐसे सभी धन पूर्णांक x, y, z पता कीजिए जिनके लिए
$$2^x + 5^y = z^2.$$

5. मान लीजिए a, b, c ऐसी अलग-अलग अशून्य वास्तविक संख्याएं हैं जिनके लिए $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ और $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 3$ है, तो सिद्ध कीजिए
$$\left(\frac{ab}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{bc}{b-c}\right)^2 + 16\left(\frac{ca}{c-a}\right)^2 > 4.$$

6. आकाश और भूमि एक खेल खेलते हैं। वे एक 45×45 वर्गाकार बोर्ड से शुरू करते हैं जिसमें 2025 बिना रंगे इकाई वर्ग हैं। अपनी चाल आने पर हर खिलाड़ी एक पंक्ति (row) या स्तम्भ (column) चुनता है और उस पंक्ति या स्तम्भ के सभी बिना रंगे इकाई वर्गों को अपने चुने रंग से रंग देता है। आकाश लाल रंग से रंगता है और भूमि नीले रंग से। अगर आकाश पहले चाल चलता है, तो यह मानते हुए कि दोनों खिलाड़ी अपने-अपने रंग से ज्यादा से ज्यादा वर्गों को रंगना चाहते हैं और अपना श्रेष्ठतम खेल दिखाते हैं, तो पता कीजिए कि भूमि अधिक से अधिक कितने वर्गों को नीला रंग सकती है।

---------00000---------