40वाँ भारतीय राष्ट्रीय गणितीय ओलंपियाड – 2026

समय: 4.5 hours **जनवरी 18, 2026**

निर्देश:

- **सभी प्रश्नों का उत्तर दीजिए. सभी प्रश्नों के अंक समान हैं. अधिकतम अंक : 102.**
- **प्रत्येक प्रश्न का उत्तर नए पृष्ठ से प्रारंभ कीजिये. प्रश्न क्रमांक स्पष्ट रूप से इंगित कीजिये.**
- **बिना स्पष्टीकरण के केवल उत्तर बताने पर अंक नहीं दिए जाएंगे.**
- **किसी भी तरह के गणक (calculators), चांदा (protractors), और कोई भी इलेक्ट्रॉनिक्स यंत्रों के प्रयोग की अनुमति नहीं है.**
- **पैमाना (rulers) तथा परकार (compasses) के प्रयोग की अनुमति है. स्वच्छ और अंकित आरेख बनाएँ.**

1. मान लीजिए $x_1, x_2, x_3, \ldots$ धनात्मक पूर्णांकों का एक अनुक्रम है, जिसे निम्न प्रकार से परिभाषित किया गया है: $x_1 = 1$ और प्रत्येक $n \geq 1$ के लिए $x_{n+1} = x_n + \lfloor \sqrt{x_n} \rfloor$. सभी धनात्मक पूर्णांक m ज्ञात कीजिए जिनके लिए किसी $n \geq 1$ के लिए $x_n = m^2$ हो।

   (यहाँ $\lfloor x \rfloor$ का अर्थ प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए उससे छोटी या उसके बराबर सबसे बड़ी पूर्णांक संख्या है।)

2. मान लीजिए $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ एक फलन है जो निम्न शर्त को संतुष्ट करता है: प्रत्येक $k > 2026$ के लिए, संख्या $f(k)$, सूची $f(1), f(2), \ldots, f(k-1)$ में अधिकतम बार प्रकट होने वाले एक संख्या की आवृत्ति के बराबर है. सिद्ध कीजिए कि अनंत रूप से अनेक $n \in \mathbb{N}$ के लिए $f(n) = f(n + f(n))$.

   (यहाँ $\mathbb{N}$ से तात्पर्य धनात्मक पूर्णांकों के समुच्चय $\{1, 2, 3, \ldots\}$ से है।)

3. मान लीजिए ABC एक न्यूनकोण विषमबाहु त्रिभुज है, जिसका परिवृत्त Γ है. मान लें M, भुजा BC का मध्यबिंदु है तथा N, Γ के लघु चाप $\widehat{BC}$ का मध्यबिंदु है. बिंदु P और Q क्रमशः रेखाखंड AB और AC पर इस प्रकार स्थित हैं कि $BP = BN$ तथा $CQ = CN$. बिंदु $K \neq N$, रेखा AN पर स्थित है और $MK = MN$ है. सिद्ध कीजिए कि $\angle PKQ = 90^\circ$.

4. दो पूर्णांक a और b को सहगामी (companions) कहा जाता है यदि प्रत्येक अभाज्य संख्या p या तो दोनों a, b को विभाजित करती है अथवा किसी को भी विभाजित नहीं करती। सभी फलन $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ज्ञात कीजिए जिनके लिए $f(0) = 0$ हो तथा सभी $m, n \in \mathbb{N}_0$ के लिए संख्याएँ $f(m) + n$ और $f(n) + m$ सहगामी हों। (यहाँ $\mathbb{N}_0$ से तात्पर्य सभी अऋणात्मक पूर्णांकों के समुच्चय से है।)

5. तीन रेखाएँ ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 समतल में एक न्यूनकोणीय त्रिभुज $\mathcal{T}$ बनाती हैं। बिंदु P, $\mathcal{T}$ के आंतरिक भाग में स्थित है. प्रत्येक $i \in \{1, 2, 3\}$ के लिए τ_i उस रूपांतरण को दर्शाता है जिसके अंतर्गत समतल के किसी भी बिंदु X का प्रतिबिंब ℓ_i के सापेक्ष $\tau_i(X)$ होता है. $(1, 2, 3)$ के प्रत्येक क्रमचय (i, j, k) के लिए, बिंदु $P_{ijk} \coloneqq \tau_k(\tau_j(\tau_i(P)))$ परिभाषित किया गया है.

   सिद्ध कीजिए कि बिंदु P_{123}, P_{132}, P_{213}, P_{231}, P_{312}, P_{321} चक्रीय होंगे तभी और केवल तभी (if and only if) जब बिंदु P, त्रिभुज $\mathcal{T}$ के लम्बकेंद्र के साथ संपाती हो.

6. दो गड्डियाँ $\mathcal{A}$ और $\mathcal{B}$, जिनमें प्रत्येक में 40 ताश के पत्ते हैं, दोपहर के समय एक मेज़ पर रखी जाती हैं. इसके बाद हर मिनट, हम ऊपर के पत्ते $a \in \mathcal{A}$ और $b \in \mathcal{B}$ उठाते हैं और उनके बीच एक द्वंद्व (duel) कराते हैं। किसी भी दो पत्तियों $a \in \mathcal{A}$ और $b \in \mathcal{B}$ के लिए, जब-जब a और b का द्वंद्व होता है, परिणाम हमेशा समान रहता है और अन्य सभी द्वंद्वों से स्वतंत्र होता है। एक द्वंद्व के तीन संभावित परिणाम होते हैं:

   - यदि कोई पत्ती जीतती है, तो उसे अपनी गड्डी के ऊपर वापस रख दिया जाता है और हारने वाली पत्ती को उसकी गड्डी के नीचे रख दिया जाता है।
   - यदि a और b समान रूप से शक्तिशाली हैं, तो दोनों को उनकी-उनकी गड्डियों से हटा दिया जाता है।
   - यदि a और b आपस में कोई अंतःक्रिया नहीं करते, तो दोनों को उनकी-उनकी गड्डियों के नीचे रख दिया जाता है।

   यह प्रक्रिया तब समाप्त होती है जब दोनों गड्डियाँ खाली हो जाती हैं। यदि कोई प्रक्रिया समाप्त हो जाती है, तो उसे एक खेल (game) कहा जाता है। सिद्ध कीजिए कि किसी खेल के चलने की अधिकतम अवधि 356 घंटे होती है।

---------00000---------