क्षेत्रीय गणित ओलिंपियाड – 2025

समय: 3 घंटे **नवम्बर 16, 2025**

निर्देश:

- **किसी भी तरह के गणक (calculators) तथा चांदा (protractors) के प्रयोग की अनुमति नहीं है.**
- **पैमाना (rulers) तथा परकार (compasses) के प्रयोग की अनुमति है.**
- **सभी प्रश्नों के अंक समान हैं. अधिकतम अंक : 102.**
- **बिना स्पष्टीकरण के केवल उत्तर बताने पर अंक नहीं दिए जाएंगे.**
- **सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये.**
- **प्रत्येक प्रश्न का उत्तर नए पृष्ठ से प्रारंभ कीजिये. प्रश्न क्रमांक स्पष्ट रूप से इंगित कीजिये.**

1. निम्नलिखित समीकरणों के समूह को अऋणात्मक पूर्णांकों $a_1, a_2, \ldots, a_8$ में हल कीजिए, जहाँ $a_i \neq 1$ है ($i = 1, \ldots, 8$ के लिए):

$$\begin{aligned} a_1a_2 &= a_3 + a_4, \\ a_3a_4 &= a_5 + a_6, \\ a_5a_6 &= a_7 + a_8, \\ a_7a_8 &= a_1 + a_2. \end{aligned}$$

2. मान लीजिए कि a, b, c धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं जिनके लिए $abc = 1$ है। सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{2a^2}{a^3+1} + \frac{2b^2}{b^3+1} + \frac{2c^2}{c^3+1} \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

3. मान लीजिए कि $ABCDE$ एक उत्तल पंचभुज है जिसमें $AB = AE$, $CB = CD$, और $\angle AED = \angle CDE = 90^\circ$ हैं। $\angle EAB$ और $\angle DCB$ के आंतरिक समद्विभाजकें बिंदु I पर प्रतिच्छेद करते हैं, और M बिंदु AC का मध्यबिंदु है। सिद्ध कीजिए कि $\angle MIC = \angle AIB$.

4. एक मेंढक प्रारम्भ में बिंदु $(0, 0)$ पर है और वह वह निम्नलिखित प्रकार की चालें किसी भी क्रम में कई बार चल कर $(n, 2)$, $(n \geq 1)$ पहुँचता है:

   (i) $R = (1, 0)$, अर्थात् यदि मेंढक (a, b) पर है तो वह $(a + 1, b)$ पर जाता है;
   (ii) $U = (0, 1)$, अर्थात् यदि मेंढक (a, b) पर है तो वह $(a, b + 1)$ पर जाता है;
   (iii) $D = (1, 1)$, अर्थात् यदि मेंढक (a, b) पर है तो वह $(a + 1, b + 1)$ पर जाता है।

   यह ज्ञात कीजिए कि ऊपर दिए गए तरीकों का उपयोग करके कितने सारे तरीकों से मेंढक $(0, 0)$ से $(n, 2)$ तक पहुँच सकता है यदि UU और DD प्रकार की चालें वर्जित हैं।

   (उदाहरण के लिए, $n = 3$ के लिए $RDUR$, DRD स्वीकार्य पथ हैं, जबकि DDR, $RUURR$ वर्जित हैं।)

5. मान लीजिए कि ABC एक न्यूनकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle BAC = 60^\circ$ तथा $AB < BC < AC$ है। M, N क्रमशः AB और AC के मध्यबिंदु हैं। BE और CF ऊँचाइयाँ (altitude) हैं, जहाँ E बिंदु CA पर और F बिंदु AB पर हैं। मान लीजिए कि X, बिंदु M का BF के मध्यबिंदु के सापेक्ष प्रतिबिंब है, और Y, बिंदु N का CE के मध्यबिंदु के सापेक्ष प्रतिबिंब है। सिद्ध कीजिए कि XY, रेखा BC को समद्विभाजित करती है।

6. अनुक्रम $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$ इस प्रकार परिभाषित है: $a_0 = 49, \qquad a_n = 10^{2^n} a_{n-1} - 1$ जहाँ $n \geq 1$. सिद्ध कीजिए कि सभी $n \geq 0$ के लिए $s(a_n^2) = n^2 + n + 7$, जहाँ $s(m)$ का अर्थ दशमलव पद्धति (base 10) में लिखी अऋणात्मक पूर्णांक m के अंकों का योग है।

---------00000---------