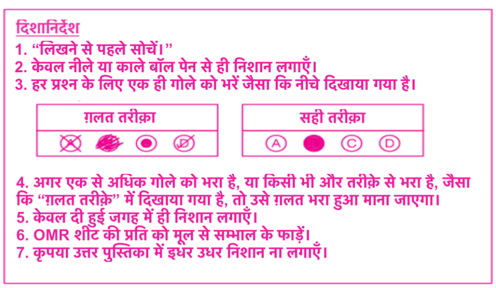
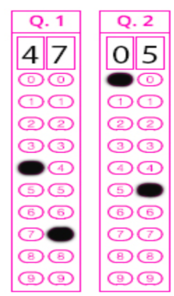
एम1

समय: 3 घंटे **प्रश्न: 30** **अधिकतम अंक: 100**

<u>दिशानिर्देश</u>

1. मोबाइल फ़ोन, स्मार्टफ़ोन, टैब्लेट, कैलकुलेटर, प्रोग्रामेबल घड़ी या किसी भी इलेक्ट्रॉनिक उपकरण का प्रयोग **पूर्णतः वर्जित** है। केवल साधारण पेन व पेंसिल ही परीक्षा केंद्र में ले जा सकते हैं।
2. उत्तरों की जाँच मशीनों से होगी। OMR शीट पर बुलबुलों को **नीले या काले पेन** से पूरी तरह भरें। कृपया **पेंसिल या जेल पेन का उपयोग <u>न करें</u>**। उत्तर सुनिश्चित करने के बाद ही बुलबुलों को भरें; वरना मिटाने पर OMR शीट ख़राब हो सकती है जिससे कि मशीन उत्तर नहीं पढ़ पाएगी।
3. OMR शीट पर आपके द्वारा दिए जाने वाले नाम, ईमेल-आइ.डी., व जन्मतिथि के ज़रिए लॉगिन करके आप IOQM में अपना स्कोर (प्राप्तांक) देख सकेंगे।
4. अपूर्ण/ग़लत या ध्यान से नहीं भारी गई जानकारी की वजह से आप इस परीक्षा में अमान्य घोषित हो सकते हैं।
5. हर प्रश्न का उत्तर 1 या 2 अंकों की संख्या है। नीचे, पहले चित्र में बुलबुले भरने के सही व ग़लत तरीक़े, निर्देशों के साथ दर्शाए गए हैं। दूसरे चित्र में दर्शाया गया है कि 1-अंक व 2-अंक की संख्या को कैसे चिन्हित करेंगे।





6. OMR शीट पर लिखा गया उत्तर किसी काम का नहीं है। भरे हुए बुलबुले ही आपका उत्तर माने जाएँगे।
7. प्रश्न 1 से प्रश्न 10 तक हर सही उत्तर पर 2 अंक (marks) मिलेंगे, प्रश्न 11 से प्रश्न 20 तक हर सही उत्तर पर 3 अंक (marks) मिलेंगे व प्रश्न 21 से प्रश्न 30 तक हर सही उत्तर पर 5 अंक मिलेंगे।
8. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
9. कोई ऋणात्मक अंक (negative marks) नहीं हैं।
10. सभी रफ़ कार्य प्रश्नों के नीचे दी गई ख़ाली जगह में करें। आपके पास प्रश्न-पत्र के अंत में भी रफ़ कार्य के लिए ख़ाली जगह है।
11. परीक्षा के बाद परोक्षार्थियों के लिए चिन्हित OMR शीट की प्रति आप ले जा सकते हैं।
12. अपनी OMR शीट की प्रति इस बार के ओलम्पियाड ख़त्म होने तक सम्भाल कर रखें; इसकी बाद में सत्यापन के लिए जरूरत पड़ेगी।
13. परीक्षा के उपरांत आप प्रश्न पत्र अपने साथ ले जा सकते हैं।

नोट:

1. gcd(a, b) दो पूर्णांकों a व b के महत्तम समापवर्तक (म.स., या greatest common divisor) को निर्देशित करता है।
2. lcm(a, b) दो पूर्णांकों a व b के लघुतम समापवर्त्य (ल.स., या least common multiple) को निर्देशित करता है।
3. अगर अन्यथा ना दिया हो तो सभी संख्याएँ दशमलव प्राणाली में लिखी जाएँगी।

प्रश्न

1. xy-कार्तीय तल में एक चतुर्भुज $ABCD$ लीजिए जिसकी भुजाएं AB व CD समान्तर हैं व $AD = BC$ है। यदि $A = (0, 0)$, $B = (10, 0)$, $C = (8, 5)$ तथा $D = (a, b)$ हो तो a^2b का मान ज्ञात कीजिए।

2. धनात्मक पूर्णांकों के समुच्चय पर परिभाषित एक फलन f ऐसा है कि प्रत्येक विषम पूर्णाक n के लिए $f(n) = n - 1$ तथा प्रत्येक सम पूर्णांक n के लिए $f(n) = n^2 - 1$ है। ऐसे सभी n का योगफल ज्ञात कीजिए जिनके लिए $f(f(n)) = 99$ है।

3. उन सभी धनात्मक पूर्णांकों n का योगफल ज्ञात कीजिए जो 100 या उससे कम हैं तथा जो 2 या 3 के अलावा किसी अन्य अभाज्य संख्या से विभाजित नहीं होते।

4. एक घनाकार पासे के छः पृष्ठों पर 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 इस प्रकार अंकित है कि विपरीत पृष्ठों के प्रत्येक युग्म पर अंकित संख्याओं का योग 2^5 है। ऐसे दो पासे एक दूसरे के ऊपर रखे जाते हैं। अब यदि दृष्टिगोचर 9 संख्याओं का महत्तम संभव योगफल N है (पासों के ऐसे सभी संयोजनों के लिए), तो N के सभी अंकों के वर्गों का योगफल ज्ञात कीजिए।

5. यदि
$$(x + 1)(x^2 + 3)(x^4 + 5)(x^8 + 7) \cdots (x^{1024} + 21)$$
के प्रस्तार में x^{2025} के गुणांक को N से निरूपित किया जाए तो N को 100 से विभाजित करने पर शेषफल क्या होगा?

रफ़ कार्य के लिए जगह

6. चार भिन्न अभाज्य संख्याओं का योगफल 240 है। यदि इन चारों अभाज्य संख्याओं में कोई भी 70 से बड़ी नहीं है तो इनमें से सबसे छोटी संख्या क्या है?

7. ऐसे कितने धनात्मक पूर्णांक $n \leq 100$ हैं जो $i^3 \leq n$ को संतुष्ट करने वाले सभी धनात्मक पूर्णांकों i से विभाजित होते हैं?

8. 6 इकाई वर्गों से निर्मित 2×3 आयत लीजिए। इसके छ: कोष्ठों को संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6 द्वारा ऐसे कितने प्रकार से भरा जा सकता है कि प्रत्येक कोष्ठ में एक ही संख्या हो और आसन्न कोष्ठों (अर्थात वे कोष्ठ जिनकी एक भुजा समान है) में भरी गई संख्याएं सह-अभाज्य हों?

9. ऐसा महत्तम पूर्णांक n ज्ञात करो कि भुजा n वाला वर्ग उस वृत्ताकार चक्रिका में समाहित हो सके जिसका क्षेत्रफल 1000 है।

रफ़ कार्य के लिए जगह

10. असमिका $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2 < 100$ को संतुष्ट करने वाला महत्तम धनात्मक पूर्णांक n ज्ञात करो।

11. एक ऐसा धनात्मक पूर्णांक m लीजिए जो कि समीकरण

$$5(2m+1)(2m+3)(2m+5) = \overline{ababab}$$

को संतुष्ट करता है, जबकि a तथा b अलग-अलग अंक हैं तथा $\overline{ababab}$ छः अंकीय संख्या है। तब $m+a+b$ का मान क्या है?

12. ऐसे क्रमित युग्मों (m, n) की संख्या ज्ञात कीजिए, जबकि m तथा n ऐसे धनात्मक पूर्णांक हैं जो 20000 के बराबर या उससे कम हैं तथा $m^2 + n^4$, 2 की एक घात है।

रफ़ कार्य के लिए जगह

13. एक उत्तल चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्णों लंबाई 12 व 16 है, तथा सम्मुख भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखण्डों की लंबाई बराबर है। चतुर्भुज $ABCD$ का अधिकतम संभव क्षेत्रफल क्या है?

14. एक वर्ग $ABCD$ की भुजा AB की लंबाई 1 है और यह एक वृत्त S की जीवा भी है। भुजा CD वृत्त S को प्रतिच्छेदित नहीं करती। बिन्दु C से वृत्त S पर खींची गई एक स्पर्शरेखा CK इस वृत्त को बिन्दु K पर स्पर्श करती है तथा CK की लंबाई 2 है। यदि वृत्त S का व्यास d है तो d^2 का मान ज्ञात कीजिए।

15. यदि a, b, c, d ऐसे धनात्मक पूर्णांक हैं कि

$$17(abcd + ab + ad + cd + 1) = 20(bcd + b + d),$$

है तो $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

रफ़ कार्य के लिए जगह

16. यदि

$$1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{7}}}}}}=\cfrac{1}{x_1+\cfrac{1}{x_2+\cfrac{1}{x_3+\cfrac{1}{x_4+\cfrac{1}{x_5+\cfrac{1}{x_6+\cfrac{1}{x_7}}}}}}}$$

है, जबकि $x_1, x_2, \ldots, x_7$ धनात्मक पूर्णांक हैं, तब $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$ का मान ज्ञात कीजिए।

17. एक बक्से में 100 पत्ते हैं, जिन पर 1 से लेकर 100 तक की संख्याएं अंकित हैं। अपनी आँखों पर पट्टी बाँधकर मैनक इस बक्से में से एक या अधिक पत्ते निकालता है। फिर वह पट्टी उतारकर उन सभी पत्तों पर लिखी संख्याओं का आपस में गुणा कर देता है। मैनक चाहता है कि यह गुणनफल 6 का गुणज हो। उसे ऐसा सुनिश्चित करने के लिए कितने पत्ते निकालने चाहिए?

18. एक तल में x-अक्ष की धनात्मक दिशा को पूर्व व y-अक्ष की धनात्मक दिशा को उत्तर मानें। मान लीजिए कि आप $(0, 0)$ पर हैं और $(7, 12)$ पर जाना चाहते हैं। प्रत्येक चरण में अपनी वर्तमान स्थिति से आप इकाई दूरी पूर्व या इकाई दूरी उत्तर की ओर बढ़ सकते हैं, परन्तु आपको ऐसा करते समय ऐसे बिन्दु (h, k) पर जाने की अनुमति नहीं है जिसके लिए दोनों h व k विषम हों। ऐसे सभी पथों की संख्या n ज्ञात करें.

रफ़ कार्य के लिए जगह

19. ऐसे सभी क्रमित युग्मों (m, n) की संख्या ज्ञात कीजिए जिनके लिए m तथा n ऐसे धनात्मक पूर्णांक हैं जहाँ $1 \leq m < n \leq 50$ है तथा गुणनफल mn एक पूर्ण वर्ग है।

20. चार अंकों की ऐसी कितनी संख्याएं $\overline{abcd}$ हैं, जबकि a, b, c, d दस के आधार में अशून्य अंक हैं, जिनके लिए $a + c = bd$ तथा $b + d = ac$ है?

21. एक फलन $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए $4f(3 - x) + 3f(x) = x^2$ को संतुष्ट करता है। तब निकटतम पूर्णांक तक $f(27) - f(25)$ का मान ज्ञात कीजिए।

रफ़ कार्य के लिए जगह

22. तीन लड़कियों G_1, G_2, G_3 में से सभी चार कहानियाँ S_1, S_2, S_3, S_4 पढ़ती हैं और चर्चा करती हैं कि उन्हें कौन सी कहानी पसंद आई। कोई भी कहानी ऐसी नहीं है जो तीनों को पसंद आई। इन लड़कियों के तीनों जोड़ों के लिए, कम से कम एक ऐसी कहानी है जो कि जोड़े में दोनों को पसंद आई और तीसरी लड़की को पसंद नहीं आई। यदि ऐसा संभव होने के कुल n तरीके हैं तो n के सभी अंकों के वर्गों का योगफल ज्ञात कीजिए।

23. बिन्दु P एक त्रिभुज ABC में अंतस्थ है। यदि AP, BP, CP भुजाओं BC, CA, AB के साथ क्रमश: बिंदुओं D, E, F पर मिलते हैं। यदि

$$\frac{BP}{PE} = \frac{5}{2}, \frac{CP}{PF} = \frac{7}{3}, \text{ व } \frac{AP}{PD} = \frac{p}{q}$$

जबकि p, q प्राकृत संख्याएं हैं तथा $\gcd(p,q) = 1$ है। तब $p+q$ का मान ज्ञात कीजिए।

24. यदि a तथा b ऐसे धनात्मक पूर्णांक हैं जो $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$ को संतुष्ट करते हैं, तो $a+b$ का महत्तम संभव मान क्या है?

रफ़ कार्य के लिए जगह

25. ऐसी कितनी प्राकृत संख्याएं $n \leq 105$ हैं जिनके लिए $7|2^n - n^2$ है?

26. ABC एक त्रिभुज है, D भुजा BC का मध्यबिन्दु है, O परिकेन्द्र तथा H लंबकेन्द्र है। यदि ODH एक समबाहु त्रिभुज है जिसकी भुजा की लंबाई 6 है तथा त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $a\sqrt{b}$ है, जबकि a, b पूर्णांक हैं तथा b किसी भी अभाज्य संख्या के वर्ग से विभाजित नहीं होता, तो $a + b$ का मान ज्ञात करो।

27. धनात्मक पूर्णांकों a तथा b के उन सभी क्रमित युग्मों (a, b) का संग्रह M लीजिए जो

$$ab = 406 + 11 \cdot \mathrm{lcm}(a, b) + 7 \cdot \gcd(a, b).$$

को संतुष्ट करते हैं। तब $a + b$ का न्यूनतम संभव मान क्या है?

रफ़ कार्य के लिए जगह

28. एक प्रतिनिधि मंडल में 10 सदस्य हैं। उनमें से किन्हीं भी दो की लंबाई बराबर नहीं है। यदि N उनके एक तस्वीर लेने के लिए उन्हें पंक्तिबद्ध होने के उन सभी तरीकों की संख्या है जिनमें

- सबसे बायें स्थान वाला व्यक्ति सबसे छोटा है।
- सबसे दायें स्थान वाला व्यक्ति सबसे लम्बा है, तथा
- सबसे छोटे और सबसे लम्बे व्यक्ति के बीच की पंक्ति में एक ही व्यक्ति ऐसा है जो कि अपने निकटतम व्यक्तियों से छोटा है।

यदि N को $100a + b$ के रूप में लिखा जाए, जबकि a तथा b, 100 से छोटे धनात्मक पूर्णांक हैं, तो $a + b$ का मान ज्ञात कीजिए।

29. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की भुजाओं की लंबाई 13, 13 तथा 10 है। इन भुजाओं के समान्तर खींची गई अंत:वृत की स्पर्शरेखाएं इन भुजाओं को बिंदुओं D, E, F, G, H, K में प्रतिच्छेदित करती हैं, जो कि एक षटभुज बनाते हैं। इस षटभुज $DEFGHK$ का क्षेत्रफल $m + \frac{n}{l}$ है, जबकि m, n, l ऐसे धनात्मक पूर्णांक हैं जिनके लिए $n < l$ तथा $\gcd(n, l) = 1$ है। तब $m + n + l$ का मान क्या है?

30. एक सम-द्वादशभुज (12 भुजाओं वाला बहुभुज) के शीर्षों को नीले अथवा लाल रंग से रंगा जाता है। ऐसी रंगाई N अलग-अलग ऐसे तरीकों से कर सकते हैं ताकि एक रंग के कोई भी तीन शीर्ष किसी समबाहु त्रिभुज के शीर्ष न हों, व एक रंग के कोई भी चार शीर्ष किसी वर्ग के शीर्ष न हों। यदि $N = 100p + q$ हो, जबकि p, q ऐसे दो धनात्मक पूर्णांक हैं जो 100 से कम हैं, तो $p + q$ का मान क्या होगा?

रफ़ कार्य के लिए जगह