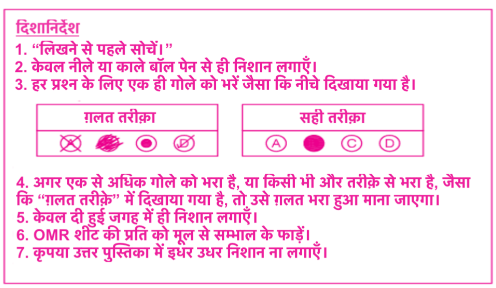
एम1

समय: 3 घंटे **प्रश्न: 30** **अधिकतम अंक: 100**

दिशानिर्देश

1. मोबाइल फ़ोन, स्मार्टफ़ोन, टैब्लेट, कैलकुलेटर, प्रोग्रामेबल घड़ी या किसी भी इलेक्ट्रॉनिक उपकरण का प्रयोग **पूर्णतः वर्जित** है। केवल साधारण पेन व पेंसिल ही परीक्षा केंद्र में ले जा सकते हैं।
2. उत्तरों की जाँच मशीनों से होगी। OMR शीट पर बुलबुलों को **नीले या काले पेन** से पूरी तरह भरें। कृपया **पेंसिल या जेल पेन का उपयोग न करें**। उत्तर सुनिश्चित करने के बाद ही बुलबुलों को भरें; वरना मिटाने पर OMR शीट ख़राब हो सकती है जिससे कि मशीन उत्तर नहीं पढ़ पाएगी।
3. OMR शीट पर आपके द्वारा दिए जाने वाले नाम, ईमेल-आइ.डी., व जन्मतिथि के ज़रिए लॉगिन करके आप IOQM में अपना स्कोर (प्राप्तांक) देख सकेंगे।
4. अपूर्ण/ग़लत या ध्यान से नहीं भारी गई जानकारी की वजह से आप इस परीक्षा में अमान्य घोषित हो सकते हैं।
5. हर प्रश्न का उत्तर 1 या 2 अंकों की संख्या है। नीचे, पहले चित्र में बुलबुले भरने के सही व ग़लत तरीक़े, निर्देशों के साथ दर्शाए गए हैं। दूसरे चित्र में दर्शाया गया है कि 1-अंक व 2-अंक की संख्या को कैसे चिन्हित करेंगे।



6. OMR शीट पर लिखा गया उत्तर किसी काम का नहीं है। भरे हुए बुलबुले ही आपका उत्तर माने जाएँगे।
7. प्रश्न 1 से प्रश्न 10 तक हर सही उत्तर पर 2 अंक (marks) मिलेंगे, प्रश्न 11 से प्रश्न 20 तक हर सही उत्तर पर 3 अंक (marks) मिलेंगे व प्रश्न 21 से प्रश्न 30 तक हर सही उत्तर पर 5 अंक मिलेंगे।
8. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
9. कोई ऋणात्मक अंक (negative marks) नहीं हैं।
10. सभी रफ़ कार्य प्रश्नों के नीचे दी गई ख़ाली जगह में करें। आपके पास प्रश्न-पत्र के अंत में भी रफ़ कार्य के लिए ख़ाली जगह है।
11. परीक्षा के बाद परोक्षार्थियों के लिए चिन्हित OMR शीट की प्रति आप ले जा सकते हैं।
12. अपनी OMR शीट की प्रति इस बार के ओलम्पियाड ख़त्म होने तक सम्भाल कर रखें; इसकी बाद में सत्यापन के लिए जरूरत पड़ेगी।
13. परीक्षा के उपरांत आप प्रश्न पत्र अपने साथ ले जा सकते हैं।

नोटः

1. gcd(a, b) दो पूर्णांकों a व b के महत्तम समापवर्तक (म.स., या greatest common divisor) को निर्देशित करता है।
2. किसी धन वास्तविक संख्या m के लिए, $\sqrt{m}$ से हमारा तात्पर्य m के धन वर्ग मूल से है। जैसे कि, $\sqrt{4} = +2$ होगा।
3. अगर अन्यथा ना दिया हो तो सभी संख्याएँ दशमलव प्राणाली में लिखी जाएँगी।

प्रश्न

1. अगर किसी संख्या x के 60% का मान 40 है तो 60 के $x\%$ का मान क्या होगा?
2. ऐसे कितने धन पूर्णांक 100 के बराबर या उससे कम हैं, जो 3 से भाज्य हैं पर 2 से भाज्य नहीं हैं।
3. पूर्णांक मान की भुजाओं वाले एक आयत का क्षेत्रफल 20 है। उसके परिमाप का न्यूनतम संभव मान क्या है?
4. पूर्णांक भुजाओं वाले कितने समद्विबाहु त्रिभुजों का परिमाप 23 है?
5. ऐसी कितनी 3-अंकों की संख्या $\overline{abc}$ (आधार 10 में) हैं जिनके लिए $a \neq 0$ व $c = a + b$ है?

रफ़ कार्य के लिए जगह

6. वर्ष 2025 में एक व्यक्ति की उम्र (वर्षों में) एक पूर्ण वर्ग है। वर्ष 2012 में भी उसकी उम्र (वर्षों में) एक पूर्ण वर्ग थी। उसकी उम्र 2025 के m वर्षों बाद एक पूर्ण घन होगी। तो m का न्यूनतम संभव मान ज्ञात करो।

7. दो वास्तविक संख्याओं का योग एक धन पूर्णांक n है व उनके वर्गों का योग $n + 1012$ है, तो n का अधिकतम संभव मान क्या है?

8. एक चतुर्भुज के चार शीर्ष A, B, C, D हैं। हम हर शीर्ष को चार रंग - लाल, नीला, हरा या पीला - में से एक रंग में ऐसे रंगना चाहते हैं कि चतुर्भुज की हर भुजा के, व विकर्ण AC के दोनों सिरे अलग रंगों में रंगे हों। हम ऐसा कितने तरीकों से कर सकते हैं?

9. एक चतुर्भुज की चार भुजाओं व एक विकर्ण की लंबाईयाँ $10, 20, 28, 50, 75$ (किसी नियत क्रम में नहीं) हैं। इनमें से कौनसी अकेली लंबाई विकर्ण की लंबाई हो सकती है?

रफ़ कार्य के लिए जगह

10. एक ठोस लम्ब वृत्तीय बेलन की लंबाई व उसके आधार की त्रिज्या धन पूर्णांक हैं, और उसके कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल का मान उसके आयतन के बराबर है। अगर उसका आयतन $k\pi$ है, जहाँ k एक धन पूर्णांक है, तो k का न्यूनतम संभव मान क्या है?

11. एक ऐसा भिन्न $\dfrac{a}{b} \neq \dfrac{3}{4}$ लो, जहाँ a, b धन पूर्णांक हैं जिनका $\gcd(a, b) = 1$ है, व $b \leq 15$ है। यदि ऐसे सभी भिन्नों में यह भिन्न $\dfrac{3}{4}$ के निकटतम चुना गया है, तो $a + b$ का मान क्या होगा?

12. पाँच अंकों के ऐसे धन पूर्णांक $\overline{abcab}$ लो जो दो अंकों की संख्या $\overline{ab}$ से भाज्य है पर 13 से भाज्य नहीं है। इस संख्या के अंकों के योग का अधिकतम संभव मान क्या है?

रफ़ कार्य के लिए जगह

13. एक चतुर्भुज की तीन भुजाओं का मान $a = 4\sqrt{3}$, $b = 9$ व $c = \sqrt{3}$ है। भुजा a व b के बीच में कोण 30° है तथा भुजा b व c के बीच में कोण 90° है। अगर विकर्णों के बीच के न्यूनकोण का मान x° है, तो x का मान क्या होगा?

14. पूर्णांकों पर परिभाषित एक फलन f ऐसा है कि किन्हीं भी दो पूर्णांक m व n के लिए

$$f(mn+1) = f(m)f(n) - f(n) - m + 2$$

होगा तथा $f(0) = 1$ है। ऐसा सबसे बड़ा धन पूर्णांक N ज्ञात करो जिसके लिए $\sum_{k=1}^{N} f(k) < 100$ है।

15. संख्या 1 से 6 तक क्रमांकित छह कूपन हैं व ऐसे छह लिफाफे भी हैं जो 1 से 6 तक क्रमांकित हैं। पहले दो कूपन किसी एक लिफ़ाफ़े में रखे गए हैं। इसी तरह, तीसरे व चौथे कूपन को भी किसी अलग लिफ़ाफ़े में साथ-साथ रखते हैं, और पाँचवे व छठे कूपन को भी साथ में किसी और ही लिफ़ाफ़े में रखते हैं। ऐसा करना कितने तरीकों से संभव है यदि किसी भी कूपन को उसी के क्रमांक से क्रमांकित लिफ़ाफ़े में ना रखा गया हो?

रफ़ कार्य के लिए जगह

16. यदि $f(x)$ व $g(x)$ घात 2 के ऐसे बहुपद हैं जिनके लिए

$$\frac{f(-2)}{g(-2)} = \frac{f(3)}{g(3)} = 4.$$

यदि $g(5) = 2, f(7) = 12, g(7) = -6$ है तो $f(5)$ का मान क्या होगा?

17. $MTAI$ एक समांतर चतुर्भुज है जिसका क्षेत्रफल $\frac{40}{41}$ इकाई वर्ग है व जिसके लिए भुजा $MI = 1/MT$ है। यदि d विकर्ण MA का न्यूनतम संभव मान है, व $d^2 = \frac{a}{b}$, जहाँ a, b धन पूर्णांक हैं जिनके लिए $\gcd(a, b) = 1$ है, तो $|a - b|$ का मान ज्ञात करो।

18. मान लो कि नौ अंकों के कुल N ऐसे पूर्णांक हैं जो 223334444 के अंकों का क्रमचय करने पर प्राप्त होते हैं व जिनके अंकों में कम से कम एक अंक 3 सबसे दाहिने आने वाले अंक 4 के भी दाहिने में आता है। यदि N को 100 से भाग दें, तो कितना शेष प्राप्त होगा?

रफ़ कार्य के लिए जगह

19. एक त्रिभुज ABC में, $\angle B = 90^\circ, AB = 1$ व $BC = 2$ है। भुजा BC पर दो बिंदु D व E इस तरह से हैं कि बिंदु E बिंदु C तथा बिंदु D के बीच में है, व $DEFG$ एक वर्ग है, जहाँ बिंदु F भुजा AC पर है तथा बिंदु G ऐसे वृत्त पर जिसका केंद्र A है व जो बिंदु B से गुज़रता है। यदि $DEFG$ का क्षेत्रफल $\frac{m}{n}$ है, जहाँ m, n धन पूर्णांक हैं व $\gcd(m,n) = 1$ है, तो $m + n$ का मान क्या होगा?

20. मान लो कि फलन f की परिभाषा है

$$f(n) = \text{वह शेष जो } n^n \text{ का 7 से भाग देने पर प्राप्त होता है}$$

सभी धन पूर्णांकों n के लिए। ऐसा सबसे छोटा धन पूर्णांक T ज्ञात करो जिसके लिए सभी धन पूर्णांकों n के लिए $f(n+T) = f(n)$ हो।

21. किन्हीं वास्तविक संख्याओं m, n व किसी धन पूर्णांक a के लिए सूची $(a+1)n^2, m^2, a(n+1)^2$ में तीन क्रमागत पूर्णांक बढ़ते हुए क्रम में हैं, तो m^2 का अधिकतम संभव मान क्या है?

रफ़ कार्य के लिए जगह

22. एक मेज पर m नीले और n लाल कंचे हैं। अरमान और बबिता एक खेल खेलते हैं जिसमें बारी बारी से चलना होता है। हर चाल में खेलने वाले को अपनी पसंद के रंग का एक कंचा उठाना होता है। अरमान पहले शुरू करता है, और जो भी आख़िरी लाल कंचा उठाएगा उसे जीता माना जाएगा। तो ऐसे कितने (m, n) हैं, जहाँ $1 \leq m, n \leq 11$ हो, जिनके लिए अरमान यह सुनिश्चित कर सकता है कि वह जीतेगा।

23. एक आयत $ABCD$ लो, और क्रमशः उसकी भुजाओं AB व BC पर बिंदु M, N लो। मान लो कि $MC = CD$ व $MD = MN$ है, तथा बिंदु C, D, M, N एक वृत्त पर पड़ते हैं। अगर $(AB/BC)^2 = m/n$ जहाँ m तथा n ऐसे धन पूर्णांक हैं, जिनके लिए $\gcd(m, n) = 1$ है, तो $m + n$ का मान क्या होगा?

24. मान लो कि $P(x) = x^{2025}$, $Q(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ है। यदि बहुपद $P(x)$ को बहुपद $Q(x)$ से भाग देने पर बहुपद शेष $R(x)$ बचता है तो $R(3)$ का मान ज्ञात करो।

रफ़ कार्य के लिए जगह

25. समुच्चय $\{1, 2, 3, \ldots, 37\}$ में ऐसी कितनी संख्याएँ n हैं जिनके लिए $2n$ संख्याओं $1, 2, \ldots, 2n$ को n युग्मों $\{a_i, b_i\}, 1 \leq i \leq n$ में से ऐसे बाँट सकते हैं ताकि $\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i)$ एक वर्ग हो?

26. वास्तविक संख्याओं की एक परिमित श्रेणी (finite sequence) लें। इस श्रेणी के चार क्रमागत पदों के औसत लेने पर दृढ़तः वर्धमान (strictly increasing) संख्याएँ मिलती हैं, ओर सात क्रमागत पदों के औसत लेने पर दृढ़तः ह्रासमान (strictly decreasing) संख्याएँ मिलती हैं। तो इस श्रेणी की अधिकतम लंबाई क्या होगी?

27. धन पूर्णांकों के ऐसे कितने क्रमागत त्रिक (triples) (a, b, c) हैं जिनके लिए $1 \leq a, b, c \leq 50$ है व

$$\frac{\text{lcm}(a, c) + \text{lcm}(b, c)}{a + b} = \frac{26c}{27}.$$

यहाँ $\text{lcm}(x, y)$ से हमारा तात्पर्य x, y के ल॰स॰, यानी लघुत्तम समापवर्त्य (least common multiple) से है।

रफ़ कार्य के लिए जगह

28. मान लो कि a एक ऐसा धन पूर्णांक है जो कि एक पूर्ण वर्ग नहीं है। मान लो कि x, y ऐसे अऋणात्मक पूर्णांक हैं जिनके लिए $\sqrt{x - \sqrt{x+a}} = \sqrt{a} - y$ है। तो a का अधिकतम संभव मान क्या होगा जिससे कि $a < 100$ हो?

29. एक नियत बहुभुज, जिसके $n \geq 5$ शीर्ष हों, को बहुरंगी कहते हैं यदि उसके शीर्षों को अधिक से अधिक 6 रंगों में ऐसे रंग सकते हैं, कि हर शीर्ष को ठीक एक रंग में रंगा जाए व कोई भी पाँच शीर्ष जो लगातार पड़ते हों, अलग-अलग रंग के हों। ऐसे सबसे बड़े n का मान ज्ञात करो ताकि n शीर्षों का नियत बहुभुज बहुरंगी **न** हो ।

30. S एक वृत्त है जिसकी त्रिज्या 10 है व केंद्र O है। मान लो कि S_1 व S_2 दो ऐसे वृत्त हैं जो S को अंतः स्पर्श करते हैं व दो अलग-अलग बिंदुओं A तथा B पर एक-दूसरे से प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle OAB = 90^\circ$ तो S_1 तथा S_2 की त्रिज्याओं का योग क्या होगा?

रफ़ कार्य के लिए जगह