नोट:

1. $\gcd(a, b)$ दो पूर्णांकों a व b के महत्तम समापवर्तक (म.स., या greatest common divisor) को निर्देशित करता है।
2. $\lfloor x \rfloor$ ऐसे सबसे बड़े पूर्णांक को निर्देशित करता है जो x से छोटा या उसके बराबर है।
3. किसी धन वास्तविक संख्या m के लिए, $\sqrt{m}$ से हमारा तात्पर्य m के धन वर्ग मूल से है। जैसे कि, $\sqrt{4} = +2$ होगा।
4. अगर अन्यथा ना दिया हो तो सभी संख्याएँ दशमलव प्राणाली में लिखी जाएँगी।

प्रश्न

1. $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$ को विभाजित नहीं करने वाला सबसे छोटा पूर्णांक है:
2. चार अंकों वाली ऐसी कितनी विषम संख्याएँ हैं जिनमें $1, 2, 3, 4$ में से प्रत्येक अंक ठीक एक बार आता हो?
3. 5^{2024} के आख़िरी दोनों अंक (उसी क्रम में लेने पर) कौनसी संख्या बनाते हैं?
4. मान लो कि $ABCD$ एक चतुर्भुज है तथा $\angle ADC = 70°, \angle ACD = 70°$, $\angle ACB = 10°$ व $\angle BAD = 110°$ है। तो $\angle CAB$ का मान (डिग्री में) होगा:
5. मान लो कि $a = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$, व $b = \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}$ तथा $c = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z}\right)\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right)$ है। तो $|ab - c|$ का मान है:

रफ़ कार्य के लिए जगह

6. वास्तविक संख्याओं के ऐसे कितने त्रिक (triples) (a, b, c) हैं जिनके लिए $a^{20} + b^{20} + c^{20} = a^{24} + b^{24} + c^{24} = 1$ हो?

7. एक ऐसे घन के सभी संभव पृष्ठीय क्षेत्रफलों का योग क्या होगा जिसके दो शीर्ष क्रमशः $(1, 2, 0)$ व $(3, 3, 2)$ हैं?

8. मान लो कि n ऐसा सबसे छोटा पूर्णांक है जिसके लिए n के अंकों का योग 5 से भाज्य है, व $(n + 1)$ के अंकों का योग भी 5 से भाज्य है। n के पहले दो अंक, उसी क्रम में, क्या होंगे?

9. बिंदुओं के एक ग्रिड $X = \{(m, n) \mid 0 \leq m, n \leq 4\}$ को लें। हम कहेंगे कि X के बिंदुओं का युग्म $\{(a, b), (c, d)\}$ एक घुड़चाल-युग्म है यदि ($c = a \pm 2$ and $d = b \pm 1$) हो या ($c = a \pm 1$ and $d = b \pm 2$) हो। तो X में घुड़चाल-युग्मों की संख्या है:

रफ़ कार्य के लिए जगह

10. ऐसी कितने धन पूर्णांक p हैं जिनके एक ऐसा त्रिभुज संभव है जिसकी भुजाओं के मान $a, b,$ व c समीकरण

$$a^2 + (p^2 + 9)b^2 + 9c^2 - 6ab - 6pbc = 0$$

को संतुष्ट करते हैं।

11. मान लो कि धन वास्तविक संख्याओं a, b, c के लिए:

$$\frac{a}{2b+1} + \frac{2b}{3c+1} + \frac{3c}{a+1} = 1$$
$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{3c+1} = 2$$

है। तो $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ का मान क्या होगा?

12. एक वर्ग $ABCD$ लो जिसकी भुजाओं की लंबाई 16 है। मान लो कि E, F भुजा CD पर ऐसी बिंदु हैं जिससे कि $CE = EF = FD$ है। मान लो कि रेखाएँ BF व AE बिंदु M पर मिलती हैं। तो $\triangle MAB$ का क्षेत्रफल है:

रफ़ कार्य के लिए जगह

13. तीन ऐसे धन पूर्णांक a, b, c लो जहाँ $a > c$ है, और जो निम्न समीकरण संतुष्ट करते हों:

$$ac + b + c = bc + a + 66, \quad a + b + c = 32.$$

तो a का मान ज्ञात करो।

14. शुरुआत में मूल बिंदु $(0, 0)$ पर 3^{80} कण हैं। हर चरण में ये कण x-अक्ष के ऊपर स्थित बिंदुओं पर निम्न तरह से स्थानांतरित किए जाते हैं: अगर किसी बिंदु (x, y) पर n कण हैं, तो उनमें से $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ को $(x + 1, y + 1)$ पर स्थानांतरित करते हैं, $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ को $(x, y + 1)$ पर स्थानांतरित करते हैं व बाकी कणों को $(x - 1, y + 1)$ पर स्थानांतरित करते हैं। जैसे कि पहले चरण के बाद प्रत्येक बिंदु $(1, 1)$, $(0, 1)$ and $(-1, 1)$ पर 3^{79} कण होंगे। दूसरे चरण के बाद बिंदु $(-2, 2)$ और $(2, 2)$ पर 3^{78} कण होंगे, बिंदु $(-1, 2)$ व $(1, 2)$ पर 2×3^{78} कण होंगे, और $(0, 2)$ पर 3^{79} कण होंगे। तो 80 चरणों के बाद बिंदु $(79, 80)$ पर कितने कण होंगे?

15. मान लो कि समुच्चय X में 20 धन पूर्णांक $n, n + 2, \ldots, n + 38$ हैं। तो ऐसा सबसे छोटा n कौन सा होगा जिसके लिए कोई भी तीन संखाएँ $a, b, c \in X$ (ज़रूरी नहीं है कि अलग-अलग हों), एक न्यूनकोण त्रिभुज की भुजाओं का माप है?

रफ़ कार्य के लिए जगह

16. मान लो कि $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ एक ऐसा फलन है जो कि किसी भी वास्तविक x के लिए समीकरण $4f(3-x)+3f(x) = x^2$ को संतुष्ट करता है। तो $f(27) - f(25)$ के मान के निकटतम पूर्णांक को ज्ञात करो। (यहाँ $\mathbb{R}$ सभी वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को निर्देशित करता है।)

17. भुजाओं $BC = 30$, $CA = AB = 20$ वाले एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC को लें। बिंदु A से रेखा BC पर लम्ब डाला जाए तो वह BC से D पर मिलता है। M भुजा AD का मध्य बिंदु है। मान लो कि PQ त्रिभुज ABC के परिवृत्त की एक ऐसी जीवा है जिसके लिए M रेखाखंड PQ पर स्थित है व PQ रेखा BC के समांतर है। तो PQ की लंबाई है:

18. दो अंकों वाली ऐसी संख्याएँ p, q लो जो 10 से भाज्य नहीं हैं। मान लो कि r चार अंकों वाली वह संख्या है जो p के अंकों के बाद q के अंकों को (उसी क्रम में) रख देने पर मिलती है। एक कंप्यूटर ऐसे सभी p, q को बदल बदल कर लेता है व अपनी स्क्रीन पर r तब लिखता है जबकि $\gcd(p, q) = 1$ हो और r संख्या $p + q$ से भाज्य हो। मान लो कि कंप्यूटर की स्क्रीन पर ऐसे लिखे जाने वाली सबसे बड़ी संख्या N है, तो N के आख़िरी दो अंक (उसी क्रम में) कौन सी संख्या बनाते हैं?

रफ़ कार्य के लिए जगह

19. एक समतल में पाँच बिंदु लो, जिसमें से कोई भी तीन बिंदु समरैखिक नहीं हों। हर दो बिंदुओं को एक रेखाखंड से जोड़ देते हैं। इन रेखाखंडों को लाल या नीले से रंगने के ऐसे कितने तरीक़े हैं जिससे कि इन बिंदुओं में कोई भी तीन बिंदु ऐसा त्रिभुज ना बना सकें जिसकी सभी भुजाओं का रंग समान है।

20. मान लो कि एक प्राकृतिक संख्या n लेने पर पर हर चरण में दो में से एक संक्रिया कर सकते हैं: (1) n को 2 से गुणा कर दें या (2) n से 3 घटा लें। जैसे कि 8 से 13 तक पहुँचने के लिए $8 \to 16 \to 13$ चरण ले सकते हैं: आपको दो चरण लगेंगे और दो से कम चरण में यह नहीं संभव है। 11 से शुरू करके 121 तक पहुँचने के लिए कम से कम कितने चरण लगेंगे?

21. एक पूर्णांक n ऐसा है कि $\left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor$ तीन अंकों वाली संख्या है जिसके सभी अंक समान हैं, व $\left\lfloor \frac{n-172}{4} \right\rfloor$ चार अंकों वाली ऐसी संख्या है जिसके अंक $2, 0, 2, 4$ (किसी क्रम में) हैं। तो n को 100 से भाग देने पर कितना शेष रह जाता है?

रफ़ कार्य के लिए जगह

22. एक त्रिभुज ABC में $\angle BAC = 90^\circ$ है। भुजा BC पर एक ऐसा बिंदु D लें जिससे कि $AB + BD = AC + CD$ हो। मान लो कि $BD : DC = 2 : 1$ है। अगर $\frac{AC}{AB} = \frac{m + \sqrt{p}}{n}$, जहाँ m, n सापेक्षतः अभाज्य (relatively prime) धन पूर्णांक हैं व p एक प्रधान संख्या (prime number) है, तो $m + n + p$ का मान ज्ञात करो।

23. चौदह संख्याएँ $1^4, 2^4, \ldots, 14^4$ लो। ऐसी सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या n कौनसी है जिससे भाग करने पर यह सभी संख्याएँ अलग-अलग शेष छोड़ती हैं?

24. ऐसे सभी बहुपदों का समुच्चय F लें जिसके गुणांक (coefficient) समुच्चय $\{0, 1\}$ में हैं। मान लो कि $q(x) = x^3 + x + 1$ है। तो F में डिग्री (degree) 14 वाले ऐसे कितने बहुपद $p(x)$ हैं जिनके लिए गुणनफल $p(x)q(x)$ भी F में हो?

रफ़ कार्य के लिए जगह

25. धन पूर्णांकों के एक परिमित समुच्चय (finite set) M में संख्या 92 है व बाक़ी सभी अलग-अलग पूर्ण वर्ग हैं। M की संख्याओं का औसत 85 है। अगर 92 को M से हटा दें तो औसत गिर कर 84 रह जाता है। अगर N^2 ऐसा सबसे बड़ा वर्ग है जो M में हो सकता है तो, N का मान क्या होगा?

26. समीकरण $16 + 15x + 15x^2 = \lfloor x \rfloor^3$ को संतुष्ट करने वाली सभी वास्तविक संख्याऐं x लेने पर $\lfloor x \rfloor$ का योग होगा:

27. एक त्रिभुज ABC के लिए बिंदु P उसके अंतः में ऐसे स्थित है कि

$$\angle BPC - \angle BAC = \angle CPA - \angle CBA = \angle APB - \angle ACB.$$

मान लो कि $\angle BAC = 30^\circ$ व $AP = 12$ है। मान लो कि P से BC, CA, AB पर लम्ब के चरण क्रमशः D, E, F हैं। अगर त्रिभुज DEF का क्षेत्रफल $m\sqrt{n}$ है जहाँ m, n पूर्णांक है व n प्रधान संख्या (prime number) है, तो गुणनफल mn का क्या मान होगा?

रफ़ कार्य के लिए जगह

28. ऐसा सबसे बड़ा धन पूर्णांक $n < 30$ कौनसा है जिसके लिए $\frac{1}{2}(n^8 + 3n^4 - 4)$ किसी भी प्रधान संख्या (prime number) के वर्ग से भाज्य नहीं है?

29. मान लो कि $n = 2^{19}3^{12}$ है। मान लो कि M वर्ग n^2 के ऐसे धन भाजकों की संख्या है जो n से छोटे हैं पर जिनसे n भाज्य नहीं है। तो M के अंतिम दो अंकों को (उसी क्रम में) लेने पर कौनसी संख्या बनती है?

30. मान लो कि एक समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B = 90^\circ$ है। मान लो कि लंब BD का मान 12 है। अगर दिया गया है कि AC का मान व त्रिभुज का परिमाप पूर्णांक हैं तो AC का न्यूनतम संभव मान क्या होगा?

रफ़ कार्य के लिए जगह