

# 39<sup>th</sup> Indian National Mathematical Olympiad – 2025

Time: 4.5 hours

January 19, 2025

## Instructions:

- Calculators (in any form) and protractors are not allowed. Rulers and compasses are allowed.
- All questions carry equal marks. Maximum marks: 102.
- No marks will be awarded for stating an answer without justification.
- Answer to each question should start on a new page. Clearly indicate the question number.

1. Consider the sequence defined by  $a_1 = 2, a_2 = 3$ , and

$$a_{2k+2} = 2 + a_k + a_{k+1} \quad \text{and} \quad a_{2k+1} = 2 + 2a_k$$

for all integers  $k \geq 1$ . Determine all positive integers  $n$  such that  $\frac{a_n}{n}$  is an integer.

2. Let  $n \geq 2$  be a positive integer. The integers  $1, 2, \dots, n$  are written on a board. In a move, Alice can pick two integers written on the board  $a \neq b$  such that  $a + b$  is an even number, erase both  $a$  and  $b$  from the board and write the number  $\frac{a+b}{2}$  on the board instead. Find all  $n$  for which Alice can make a sequence of moves so that she ends up with only one number remaining on the board.

**Note.** When  $n = 3$ , Alice changes  $(1, 2, 3)$  to  $(2, 2)$  and can't make any further moves.

3. Euclid has a tool called splitter which can only do the following two types of operations:
- Given three non-collinear marked points  $X, Y, Z$ , it can draw the line which forms the interior angle bisector of  $\angle XYZ$ .
  - It can mark the intersection point of two previously drawn non-parallel lines.

Suppose Euclid is only given three non-collinear marked points  $A, B, C$  in the plane. Prove that Euclid can use the splitter several times to draw the centre of the circle passing through  $A, B$ , and  $C$ .

4. Let  $n \geq 3$  be a positive integer. Find the largest real number  $t_n$  as a function of  $n$  such that the inequality

$$\max(|a_1 + a_2|, |a_2 + a_3|, \dots, |a_{n-1} + a_n|, |a_n + a_1|) \geq t_n \cdot \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|)$$

holds for all real numbers  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

5. Greedy goblin Griphook has a regular 2000-gon, whose every vertex has a single coin. In a move, he chooses a vertex, removes one coin each from the two adjacent vertices, and adds one coin to the chosen vertex, keeping the remaining coin for himself. He can only make such a move if both adjacent vertices have at least one coin. Griphook stops only when he cannot make any more moves. What is the maximum and minimum number of coins that he could have collected?
6. Let  $b \geq 2$  be a positive integer. Anu has an infinite collection of notes with exactly  $b - 1$  copies of a note worth  $b^k - 1$  rupees, for every integer  $k \geq 1$ . A positive integer  $n$  is called payable if Anu can pay exactly  $n^2 + 1$  rupees by using some collection of her notes. Prove that if there is a payable number, there are infinitely many payable numbers.

-----000000-----

## 39<sup>th</sup> भारतीय राष्ट्रीय गणित ओलंपियाड – 2025

समय: 4.5 घंटे

जनवरी 19, 2025

निर्देश:

- किसी भी तरह के गणक (calculators) तथा चांदा (protractors) के प्रयोग की अनुमति नहीं है। पैमाना (rulers) तथा परकार (compasses) के प्रयोग की अनुमति है।
- सभी प्रश्नों के अंक समान हैं। अधिकतम अंक : 102.
- बिना स्पष्टीकरण के केवल उत्तर बताने पर अंक नहीं दिए जाएंगे।
- प्रत्येक प्रश्न का उत्तर नए पृष्ठ से प्रारंभ कीजिये। प्रश्न क्रमांक स्पष्ट रूप से इंगित कीजिये।

1. इस अनुक्रम पर विचार करें जिसे  $a_1 = 2, a_2 = 3$  से परिभाषित किया गया है, और सभी पूर्णाकों  $k \geq 1$  के लिए

$$a_{2k+2} = 2 + a_k + a_{k+1} \quad \text{और} \quad a_{2k+1} = 2 + 2a_k$$

वह सभी धनात्मक पूर्णांक  $n$  ज्ञात करें जिनके लिए  $\frac{a_n}{n}$  एक पूर्णांक हो।

2. मान लीजिए कि  $n \geq 2$  एक धनात्मक पूर्णांक है। पूर्णांक  $1, 2, \dots, n$  एक बोर्ड पर लिखे गए हैं। एक चाल में, एलिस बोर्ड पर लिखी दो संख्याएँ  $a \neq b$  चुन सकती है, जहाँ  $a + b$  एक सम संख्या है, दोनों  $a$  और  $b$  को बोर्ड से मिटा देती है, और संख्या  $\frac{a+b}{2}$  को बोर्ड पर लिख देती है। उन सभी  $n$  को खोजें जिनके लिए एलिस चालों का एक ऐसा अनुक्रम बना सकती है जिससे कि उसके पास बोर्ड पर केवल एक संख्या शेष रहे।  
**नोट.** जब  $n = 3$ , एलिस  $(1, 2, 3)$  को  $(2, 2)$  में बदलती है और आगे कोई चाल नहीं चल सकती।

3. यूक्लिड के पास splitter नामक एक उपकरण है, जो केवल निम्नलिखित दो प्रकार की संक्रियाएँ कर सकता है:

- तीन असंरेखीय (non-collinear) चिह्नित बिंदुओं  $X, Y, Z$  के दिए जाने पर, यह उस रेखा को खींच सकता है जो  $\angle XYZ$  का आंतरिक कोण द्विभाजक बनाती है।
- यह पहले से खींची गई दो असमांतर रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिंदु को चिह्नित कर सकता है।

मान लें कि यूक्लिड को तल में केवल तीन असंरेखीय चिह्नित बिंदु  $A, B, C$  दिए गए हैं। यह प्रमाणित करें कि यूक्लिड splitter का कई बार उपयोग करके  $A, B,$  और  $C$  से होकर गुजरने वाले वृत्त का केंद्र खींच सकता है।

4. मान लें कि  $n \geq 3$  एक धनात्मक पूर्णांक है।  $n$  का एक फलन  $t_n$  के रूप में सबसे बड़ी वास्तविक संख्या खोजें, ताकि असमता

$$\max(|a_1 + a_2|, |a_2 + a_3|, \dots, |a_{n-1} + a_n|, |a_n + a_1|) \geq t_n \cdot \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|)$$

सभी वास्तविक संख्याओं  $a_1, a_2, \dots, a_n$  के लिए सत्य हो।

5. लालची गोब्लिन ग्रिफहुक के पास एक नियमित 2000-भुज (2000-gon) है, जिसकी प्रत्येक शीर्ष बिंदु पर एक सिक्का रखा हुआ है। एक चाल में, वह एक शीर्ष बिंदु चुनता है, दो आसन्न शीर्ष बिंदुओं में से प्रत्येक से एक सिक्का हटाता है, और चुने हुए शीर्ष बिंदु पर एक सिक्का जोड़ता है, और शेष सिक्का अपने पास रख लेता है। वह केवल तभी ऐसा कर सकता है जब दोनों आसन्न शीर्ष बिंदुओं पर कम से कम एक सिक्का हो। ग्रिफहुक तभी रुकता है जब वह कोई और चाल नहीं चला सकता। उसने अधिकतम और न्यूनतम कितने सिक्के एकत्रित किए हो सकते हैं?

6. मान लीजिए कि  $b \geq 2$  एक धनात्मक पूर्णांक है। अनु के पास नोट (करेंसी नोट) का एक अनंत संग्रह है जिसमें, प्रत्येक पूर्णांक  $k \geq 1$  के लिए,  $b^k - 1$  रुपये के मूल्य के बराबर नोट की ठीक  $b - 1$  प्रतियाँ हैं। एक धनात्मक पूर्णांक  $n$  को payable कहा जाता है यदि अनु अपनी नोट के कुछ संग्रह का उपयोग करके ठीक  $n^2 + 1$  रुपये चुका सकती है। यह सिद्ध करें कि यदि कोई एक payable संख्या है, तो अनंत संख्या में payable संख्याएँ हैं।

-----000000-----