38$^{\text{th}}$ Indian National Mathematical Olympiad - 2024

Time: 4.5 hours **January 21, 2024**

Instructions:

- **Calculators (in any form) and protractors are not allowed.**
- **Rulers and compasses are allowed.**
- **All questions carry equal marks. Maximum marks: 102.**
- **No marks will be awarded for stating an answer without justification.**
- **Answer all the questions.**
- **Answer to each question should start on a new page. Clearly indicate the question number.**

1. In triangle ABC with $CA = CB$, point E lies on the circumcircle of ABC such that $\angle ECB = 90^\circ$. The line through E parallel to CB intersects CA in F and AB in G. Prove that the centre of the circumcircle of triangle EGB lies on the circumcircle of triangle ECF.

2. All the squares of a 2024×2024 board are coloured white. In one move, Mohit can select one row or column whose every square is white, choose exactly 1000 squares in this row or column, and colour all of them red. Find the maximum number of squares that Mohit can colour red in a finite number of moves.

3. Let p be an odd prime number and a, b, c be integers so that the integers
$$a^{2023} + b^{2023}, \quad b^{2024} + c^{2024}, \quad c^{2025} + a^{2025}$$
are all divisible by p. Prove that p divides each of a, b, and c.

4. A finite set S of positive integers is called *cardinal* if S contains the integer $|S|$, where $|S|$ denotes the number of distinct elements in S. Let f be a function from the set of positive integers to itself, such that for any cardinal set S, the set $f(S)$ is also cardinal. Here $f(S)$ denotes the set of all integers that can be expressed as $f(a)$ for some a in S. Find all possible values of $f(2024)$.

   Note: As an example, $\{1, 3, 5\}$ is a cardinal set because it has exactly 3 distinct elements, and the set contains 3.

5. Let points A_1, A_2, and A_3 lie on the circle Γ in counter-clockwise order, and let P be a point in the same plane. For $i \in \{1, 2, 3\}$, let τ_i denote the counter-clockwise rotation of the plane centred at A_i, where the angle of the rotation is equal to the angle at vertex A_i in $\triangle A_1A_2A_3$. Further, define P_i to be the point $\tau_{i+2}(\tau_i(\tau_{i+1}(P)))$, where indices are taken modulo 3 (*i.e.*, $\tau_4 = \tau_1$ and $\tau_5 = \tau_2$).

   Prove that the radius of the circumcircle of $\triangle P_1P_2P_3$ is at most the radius of Γ.

6. For each positive integer $n \geq 3$, define A_n and B_n as
$$A_n = \sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 3} + \cdots + \sqrt{n^2 + 2n - 1},$$
$$B_n = \sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 + 4} + \cdots + \sqrt{n^2 + 2n}.$$
Determine all positive integers $n \geq 3$ for which $\lfloor A_n \rfloor = \lfloor B_n \rfloor$.

   Note. For any real number x, $\lfloor x \rfloor$ denotes the largest integer N such that $N \leq x$.

———00000———

38–वाँ भारतीय राष्ट्रीय गणित ओलंपियाड — 2024

समय: 4.5 घंटे जनवरी 21, 2024

निर्देश:

- कैलकुलेटर (किसी भी स्वरुप में) या चांदा लाने की अनुमति नहीं है।
- रुलर एवं प्रकार लाने की अनुमति है।
- सभी प्रश्न बराबर अंकों के हैं। अधिकतम अंक: 102 हैं।
- प्रश्न का हल लिखे बिना केवल जवाब लिखने पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।
- सभी प्रश्नों का जवाब दें।
- हर प्रश्न का उत्तर नये पृष्ठ से शुरू करें। प्रश्नों का उत्तर देने से पहले उत्तर–पुस्तिका पर लिखे निर्देश ध्यान से पढ़ें।

1. एक ऐसा त्रिभुज ABC लें जिसके लिए $CA = CB$ है व उसके परिवृत्त पर स्थित ऐसा बिंदु E लें जिसके लिए $\angle ECB = 90^\circ$ है। बिंदु E से CB के समांतर रेखा, रेखा CA से बिंदु F में तथा रेखा AB से बिंदु G में मिलती है। सिद्ध करें कि त्रिभुज EGB के परिवृत्त का केंद्र त्रिभुज ECF के परिवृत्त पर स्थित है।

2. 2024×2024 वर्ग के एक बोर्ड (board) के सभी वर्गों को सफ़ेद रंग देते हैं। एक चाल में मोहित इस बोर्ड की ऐसी एक पंक्ति या एक स्तंभ को चुनेगा जिसमें हर वर्ग सफ़ेद है व इस पंक्ति या स्तंभ के किन्हीं 1000 वर्गों को चुनकर उन्हें लाल रंग से रंग देगा। ज्ञात करो कि ऐसी परिमित चालों में मोहित अधिक से अधिक कितने वर्गों को लाल रंग सकता है।

3. मान लो कि p एक विषम प्रधान संख्या है व a, b, c ऐसे पूर्णांक हैं ताकि पूर्णांक

$$a^{2023} + b^{2023}, b^{2024} + c^{2024}, c^{2025} + a^{2025}$$

p से भाज्य हैं। सिद्ध करो कि p सभी पूर्णांकों a, b, c को विभाजित करता है।

4. धन पूर्णांकों के एक परिमित समुच्चय S को <u>कार्डिनल</u> (cardinal) कहेंगे अगर पूर्णांक $|S|$ समुच्चय S का सदस्य है, जहाँ $|S|$ से हमारा तात्पर्य है S के सदस्यों की गिनती से। धन पूर्णांकों के समुच्चय को स्वयं में ले जाने वाला एक ऐसा फलन f लें जिसके लिये किसी भी कार्डिनल समुच्चय S की प्रति $f(S)$ भी कार्डिनल हो। यहाँ $f(S)$ से हमारा तात्पर्य उस समुच्चय से है जिसके सदस्य वह पूर्णांक है जो S के किसी सदस्य a के लिए $f(a)$ से निर्देशित किए जा सकते हैं। $f(2024)$ के सभी संभावित मान ज्ञात करो।

   <u>नोट:</u> उदाहरण के तौर पर समुच्चय $\{1, 3, 5\}$ कार्डिनल है क्योंकि इसके कुल 3 सदस्य हैं, व समुच्चय का एक सदस्य 3 भी है।

5. बिंदु A_1, A_2 व A_3 एक वृत्त Γ पर वामावर्त स्थित हैं और P उसी समतल में एक और बिंदु है। किसी भी $i \in \{1, 2, 3\}$ के लिए τ_i से हमारा तात्पर्य इसी समतल के ऐसे वामावर्त घूर्णन (rotation) से है जो बिंदु A_i पर केंद्रित है व जिस घूर्णन का कोण $\triangle A_1A_2A_3$ में शिखर A_i के कोण के बराबर है। P_i से हमारा तात्पर्य बिंदु $\tau_{i+2}(\tau_i(\tau_{i+1}(P)))$ से है, जहाँ अनुक्रमणिका (index) को मॉड्यूलो 3 पढ़ें (यानी $\tau_4 = \tau_1$ व $\tau_5 = \tau_2$)।

   सिद्ध करो कि त्रिभुज $\triangle P_1P_2P_3$ के परिवृत्त की त्रिज्या अधिक से अधिक Γ की त्रिज्या के बराबर होगी।

6. हर धन पूर्णांक $n \geq 3$ के लिए A_n व B_n को निम्न से परिभाषित करें:

$$A_n = \sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+3} + \cdots + \sqrt{n^2+2n-1},$$
$$B_n = \sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+4} + \cdots + \sqrt{n^2+2n}.$$

   ऐसे सभी धन पूर्णांक $n \geq 3$ ज्ञात करें जिनके लिए $\lfloor A_n \rfloor = \lfloor B_n \rfloor$ है।

   <u>नोट:</u> किसी भी वास्तविक संख्या x के लिए $\lfloor x \rfloor$ से हमारा तात्पर्य ऐसे सबसे बड़े पूर्णांक N से है जिसके लिये $N \leq x$ हो।

----------00000----------