

भारतीय राष्ट्रीय खगोलीय ओलंपियाड – 2023

प्रश्नपत्रिका

अनुक्रमांक: - -
समय अवधि: तीन घंटे

दिनांक: 28 जनवरी 2023
कुल प्राप्तांक: 100

सूचनाएं:

- शुरुआत करने से पहले ये सुनिश्चित कर लें कि आपको 5 पृष्ठ की प्रश्नपत्रिका प्राप्त हुई है।
- अपना अनुक्रमांक इस पृष्ठ के उपरी हिस्से में दिये हुए बक्सों में लिखें।
- इस प्रश्नपत्रिका में कुल 6 प्रश्न हैं। हर एक प्रश्न / उप-प्रश्न के अधिकतम प्राप्तांक उसके सामने लिखे गये हैं।
- सभी प्रश्नों के लिए, अंतिम उत्तर की अपेक्षा समाधान पर पहुंचने में की प्रक्रिया अधिक महत्वपूर्ण है। जरूरत पडने पर आप उचित अभिधारणाओं / अनुमानों का प्रयोग कर सकते हैं। कृपया अपनी पद्धति स्पष्ट रूप से लिखें, स्पष्ट रूप से सभी तर्कों का वर्णन करें।
- गैर-प्रोग्रामयोग्य वैज्ञानिक कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति है।
- उत्तरपत्रिका परिवेक्षक को लौटायी जानी चाहिए। आप प्रश्नपत्रिका को वापस अपने साथ ले जा सकते हैं।
- कृपया ध्यान रखें कि अगले चरण के लिए प्रस्तावित दिनांक इस प्रकार हैं:
 - उन्मुखीकरण एवं चयन शिविर – OCSC: 01 से 18 मई 2023।
 - यह शिविर HBCSE, मुंबई में संपन्न होगा।
 - सभी प्रतिभागियों के लिए पूरी अवधि के लिए शिविर में भाग लेना अनिवार्य है।

उपयोगी स्थिरांक

सूर्य का द्रव्यमान	$M_{\odot} \approx 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$
पृथ्वी का द्रव्यमान	$M_{\oplus} \approx 5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$
चंद्र का द्रव्यमान	$M_{\lrcorner} \approx 7.347 \times 10^{22} \text{ kg}$
सूर्य की त्रिज्या	$R_{\odot} \approx 6.955 \times 10^8 \text{ m}$
पृथ्वी की त्रिज्या	$R_{\oplus} \approx 6.371 \times 10^6 \text{ m}$
चंद्र की त्रिज्या	$R_{\lrcorner} \approx 1.737 \times 10^6 \text{ m}$
प्रकाश की गति	$c \approx 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$
खगोलीय एकक (astronomical unit)	$a_{\oplus} \approx 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$
सौर स्थिरांक (पृथ्वीसमीप)	$S \approx 1366 \text{ W/m}^2$
गुरुत्वीय स्थिरांक	$G \approx 6.674 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
मंगल की कक्षीय त्रिज्या	$d_{\text{Mars}} \approx 1.542 \text{ au}$

1. एक ग्रह से दूसरे ग्रह की यात्रा करने वाले अंतरिक्षयान के लिए, यात्रा पथ को कई तरीकों से निर्धारित किया जा सकता है। इन तरीकों में से सबसे अधिक ऊर्जा कुशल तरीके को 'होमन स्थानांतरण कक्षा' (Hohmann Transfer Orbit) कहा जाता है। इस विधि में, अंतरिक्षयान एक दीर्घवृत्तीय (अण्डाकार) कक्षा में यात्रा करता है और सूर्य इस कक्षा के मुख्य फोकस पर होता है। इस लिये यान की गति केप्लर के नियमों द्वारा निर्धारित होती है और इस यात्रा के लिए ईंधन भी बहुत कम खर्च होता है। होमन कक्षा की चरणगत प्रक्रिया इस प्रकार है:

- चरण 1: अंतरिक्षयान पृथ्वी के सन्निकट होता है।
- चरण 2: अंतरिक्षयान के इंजन को प्रज्वलित किया जाता है ताकि वो पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र से निकल सके और उस क्षेत्र में प्रवेश करे जहां सूर्य का गुरुत्वाकर्षण बल सबसे प्रबल है। पृथ्वी की कक्षा में जिस बिंदु पर इंजन प्रज्वलित किया जाता है वह बिंदु अंतरिक्षयान की नई कक्षा का भी एक बिंदु होता है।
- चरण 3: अंतरिक्षयान सूर्य के चारों ओर एक दीर्घवृत्तीय कक्षा में यात्रा कर मंगल की कक्षा तक पहुंचता है।
- चरण 4: इस यात्रा का आरंभ समय ऐसा तय होता है कि, जिस समय अंतरिक्षयान मंगल की कक्षा के समीप पहुंचता है तब मंगल भी उस बिंदु पर होता है जो उसकी कक्षा और अंतरिक्षयान की कक्षा का समान बिंदु होता है।
- चरण 5: अंतरिक्षयान के इंजन को फिर से प्रज्वलित किया जाता है ताकि अंतरिक्षयान मंगल के गुरुत्वीय प्रभाव क्षेत्र में प्रवेश कर जाए और वह उसके बाद मंगल के सन्निकट रहे।

ध्यान देने योग्य बातें:

- A. वह बिंदु जहां इंजन को पहली बार प्रज्वलित किया जाता है (चरण 2), वहां पर अंतरिक्षयान सूर्य से सबसे कम दूरी पर होगा।
- B. अंतरिक्षयान जिस बिंदु पर सर्वप्रथम मंगल के गुरुत्वाकर्षण के प्रभाव क्षेत्र में पहुंच जाता है (चरण 5), वह सूर्य से सबसे अधिक दूरी पर होगा।
- C. यदि चरण 5 क्रियान्वित नहीं किया गया, तो अंतरिक्षयान सूर्य के चारों ओर अपनी अंडाकार कक्षा पूरी करेगा और अंतरिक्ष में उस बिंदु पर वापस पहुंचेगा जहां चरण 2 क्रियान्वित किया गया था।
- D. मान लें कि पृथ्वी और मंगल दोनों सूर्य के चारों ओर वृत्ताकार, सह-समतल कक्षाओं में हैं और होमन स्थानांतरण कक्षा भी उसी तल में है।
- E. मान लें कि सभी तीन पिंड (पृथ्वी, मंगल और अंतरिक्षयान) बिंदुवत् (point masses) हैं और अपनी अपनी कक्षाओं में वामावर्ती (anti-clockwise) दिशा में (ऊपर से देखने पर) घूम रहे हैं।
- F. जिस अवधि के लिए इंजन प्रज्वलित होता है (चरण 2 और चरण 5) वह बहुत कम है। इसलिए, प्रणोद (thrust) लगभग तात्कालिक (instantaneous) है।

इसके आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

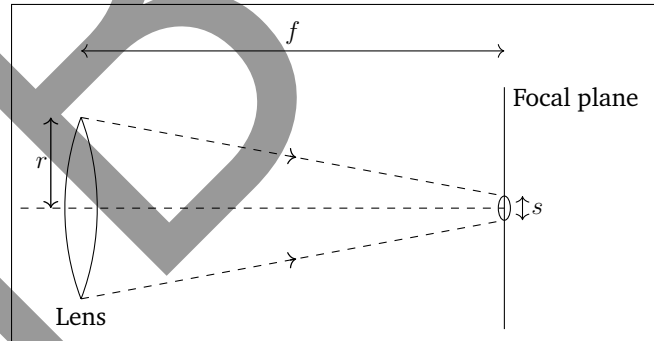
- (a) ($1\frac{1}{2}$ marks) मंगल ग्रह की कक्षीय अवधि की गणना कीजिए (वर्षों में)।
- (b) ($1\frac{1}{2}$ marks) इस होमन स्थानांतरण कक्षा के अर्ध-दीर्घ अक्ष की लंबाई की गणना करें (खगोलीय एकक में)।
- (c) ($1\frac{1}{2}$ marks) चरण 2 और चरण 5 के बीच अंतरिक्षयान द्वारा बिताए गए समय की गणना करें।
- (d) (5 marks) पृथ्वी और मंगल के बीच होमन स्थानांतरण कक्षा को दर्शाने वाला आरेख बनाएं। चरण 2 और चरण 5 के समय पृथ्वी और मंगल की स्थिति दिखाएं और उन्हें क्रमशः E_1 और M_1 तथा E_2 और M_2 चिन्हांकित करें। स्थिति E_1 को सूर्य से सीधे नीचे वाले बिंदु पर रखें। अन्य तीन बिंदुओं M_1 , E_2 और M_2 की सूर्य से बनने वाली रेखा के सूर्य - E_1 रेखा से बनने वाले कोणों की गणना करें।

- (e) ($2\frac{1}{2}$ marks) पृथ्वी और मंगल की कक्षीय गतियों की गणना करें।
- (f) (8 marks) निर्धारित करें कि निम्नलिखित कथन सही हैं या गलत। एक-एक वाक्य में अपना कारण स्पष्ट करें।
- होमन कक्षा का अर्ध-लघु अक्ष 1 au है।
 - होमन कक्षा का अर्ध-दीर्घ अक्ष 1.52 au है।
 - चरण 2 में प्रणोद (thrust) लगाने के बाद अंतरिक्षयान की गति बढ़ती है।
 - चरण 5 में प्रणोद (thrust) लगाने के बाद अंतरिक्षयान की गति बढ़ती है।
 - यदि चरण 5 क्रियान्वित नहीं किया जाता है, तो हम अंतरिक्षयान को पृथ्वी की कक्षा में स्थित उसके प्रस्थान बिंदु पर पहुंचने पर फिर से पृथ्वी के प्रभाव क्षेत्र में ला सकते हैं (ऊपर बिंदु (point) C देखें)।
 - होमन स्थानांतरण कक्षा पृथ्वी की कक्षा को केवल छूती है (और काटती नहीं है)।
 - होमन कक्षा में अंतरिक्षयान की गतिज ऊर्जा चरण 5 से ठीक पहले सबसे कम है।
 - चरण 5 के समय मंगल आगे होगा और अंतरिक्षयान उसके पीछे से आ रहा होगा।

2. (10 marks) फोकल लम्बाई $f = 200$ cm के ऑब्जेक्टिव लेंस के साथ एक टेलीस्कोप के उपयोग से एक बाइनरी स्टार सिस्टम की छवि इसके फोकस तल में रखे सीसीडी (CCD) का उपयोग करके प्राप्त की जाती है। यह छवि सीसीडी (CCD) के केंद्र में सममित (symmetric) रूप से बनती है (प्रकाशीय अक्ष पर)। चित्र में, एक बिंदु वस्तु की बनने वाली छवि की डिस्क की लम्बाई s है। विवर्तन के कारण छवि का आकार बिंदु समान नहीं होता है। ऐसी दशा में दो निकट की वस्तुओं के विभाजन की सीमा (limiting resolution) तब मानी जायेगी जब उनकी छवि डिस्क एक दूसरे को बाहरी रूप से स्पर्श कर रही हो।

ऑब्जेक्टिव लेंस की त्रिज्या $r = 5$ cm है। लेंस के विभाजन की सीमा $1''$ दी गयी है और बाइनरी सिस्टम के तारों का कोणीय अंतर $3''$ दिया गया है। सीसीडी को फोकस तल से लेंस की तरफ विस्थापित करने के लिए अनुमत सीमा dx मालूम करें, ताकि विस्थापित होने के बाद भी हम दो तारों की विभेदित छवि प्राप्त कर सकें।

(नोट: यह एक कैमरे के लेंस की "क्षेत्र की गहराई" की धारणा से संबंधित है।)



3. एक घनाकार डिब्बा, जिसके किनारों की लंबाई s है, वह एक तारे के चारों ओर, एक गोलाकार कक्षा (त्रिज्या d) में परिक्रमा कर रहा है। इस घन की परिक्रमा की समय अवधि P है। इस तारे को एक आदर्श कृष्णिका (perfect blackbody) के रूप में अनुमानित किया जा सकता है, जिसकी त्रिज्या R_0 ($s, R_0 \ll d$) और तापमान T_0 हैं। इस प्रश्न के सभी भागों में, $t = 0$ समय पर, घन की एक सतह का लंबवत सदिश (normal vector) बिल्कुल तारे की दिशा में है, और इस सतह की धवलता (Albedo) A है (जहां $A \in [0, 1]$)। घन की ऊपरी सतह घन के कक्षीय तल के समानांतर है।

$t \geq 0$ से प्रत्येक क्षण घन उष्मा संतुलन (thermal equilibrium) में है, अर्थात् इस की उत्सर्जकता (emissivity) और इसकी अवशोषणता (absorptivity) बराबर है। तापमान T घन के सभी भागों में प्रत्येक क्षण पर समान है। ध्यान दें: किसी वस्तु की सतह से परावर्तित प्रकाश और उस पर पडने वाले कुल प्रकाश के अनुपात को धवलता (Albedo) कहते हैं।

- (7 marks) यदि घन की एक ही सतह हर समय तारे की ओर रहती है, तो घन का संतुलन तापमान (equilibrium temperature) T ज्ञात करें।
- (6 marks) मान लें कि घन के सभी 6 सतहों की धवलता (albedo) A है। यदि यह घन तारे की परिक्रमा कर रहा है, लेकिन घूर्णन (rotate) नहीं कर रहा है, इस के संतुलन तापमान (equilibrium temperature) T के लिए समय t पर निर्भर सूत्र मालूम करें।
- (3 marks) अब विचार करें, जहां घन की वो सतह जो $t = 0$ पर तारे की ओर है और इसके विपरीत सतह की धवलता (albedo) A है और घन के अन्य सभी सतहों की धवलता (albedo) $1 - A$ है। भाग b में प्राप्त सूत्र को नजर रखते हुए इस स्थिति में तापमान के लिए उचित सूत्र लिखें।

4. भारतीय अंतरिक्ष अनुसंधान संगठन (ISRO) ने बृहस्पति ग्रह पर एक अंतरिक्ष यान भेजने का फैसला किया। अंतरिक्ष यान को मंगल और बृहस्पति के बीच क्षुद्रग्रह मेखला से गुजरना होगा जो 2.0 au और 3.0 au के बीच स्थित है। क्षुद्रग्रह मेखला की कुल मोटाई (सौर मंडल के तल के लंबवत दिशा में) लगभग 0.10 au है और इसमें लगभग 10^{14} क्षुद्रग्रह हैं जिनकी औसतन त्रिज्या 1.0 m है (सभी क्षुद्रग्रहोंको गोलाकार माना गया है)। अंतरिक्षयान को भी 3.0 m त्रिज्या का गोला मान लीजिये।

- (2 marks) अगर किसी भी क्षुद्रग्रह का केंद्र अंतरिक्षयान के केंद्र से एक निश्चित दूरी पर आ जाता है तो उसका यान से टकराना तय है। इस दो-आयामी क्षेत्र को cross-section क्षेत्र कहते हैं। इस cross-section क्षेत्र की गणना करें।
- (8 marks) मान लें कि क्षुद्रग्रह मेखला पूरी तरह से स्थिर है और अंतरिक्षयान को सौर मंडल के समतल प्रतल में एक किसी भी दिन पर सूर्य से दूर केंद्रीय (radial) दिशा में यात्रा करने के लिए प्रक्षेपित किया जाता है। अंतरिक्षयान क्षुद्रग्रह मेखला से बिना किसी नुकसान के निकल जाने की प्रायिकता (probability P_0) की गणना करें।
- निम्नलिखित मामलों में से प्रत्येक प्रायिकता की P_0 से गुणात्मक रूप से तुलना करें:
 - (2 marks) प्रायिकता (P_A) जब क्षुद्रग्रह मेखला के भीतर यात्रा के दौरान अंतरिक्षयान की गति दो गुना हो जाती है।
 - (1 mark) प्रायिकता (P_B) जब अंतरिक्षयान केंद्रीय रूप से आगे नहीं बढ़ रहा है, बल्कि एक दीर्घवृत्तीय कक्षा में है जिसका अपसूर्य (aphelion) बिंदु बृहस्पति की दूरी (5 au) पर है। यहां हम केवल एक क्रॉसिंग के लिए की प्रायिकता पर विचार करते हैं।
 - (2 marks) प्रायिकता (P_C) जब अंतरिक्षयान केंद्रीय रूप से आगे नहीं बढ़ रहा है, लेकिन दीर्घवृत्तीय कक्षा में है जिसका अपसूर्य (aphelion) बिंदु क्षुद्रग्रह मेखला के मध्य की दूरी (2.5 au) पर है।

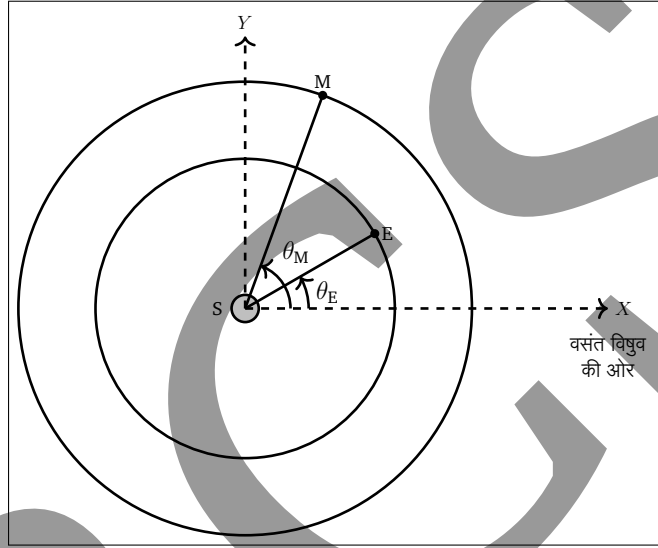
5. (22 marks) मान लें कि पृथ्वी और मंगल समतलीय वृत्ताकार कक्षाओं में सूर्य के चारों ओर परिक्रमा करते हैं और उनकी कक्षाओं की त्रिज्याएं क्रमशः r_E और r_M हैं। नीचे दिए गए चित्र में, θ_E और θ_M पृथ्वी और मंगल के त्रिज्या सदिशों (radius vectors) द्वारा बनाए गए कोण हैं, जिन्हें X के सापेक्ष में सूर्य बिंदु पर मापा जाता है। (यहाँ X वसंत विषुव की दिशा इंगित करता है – जो अंतरिक्ष में एक संदर्भ बिंदु है)।

मान लें की 21 सितंबर को, $\theta_E = 0^\circ$ था और $\theta_M = 42.3^\circ$ था।

उत्तर पत्रिका में आपको अपने प्रेक्षणों को लिखने के लिए एक तालिका दी गई है। तालिका में उल्लिखित तिथियों के लिए θ_E और θ_M के मानों की गणना करें और उन्हें संबंधित स्तंभ में लिखें।

उत्तर पत्रिका में मंगल और पृथ्वी की कक्षाओं का एक विशेष खंड भी दिया गया है। बिंदुवत रेखाएं (dotted line) 1° के अंतराल पर कक्षाओं में कोणों को चिन्हित करती हैं। केंद्रीय काली रेखा इस अवस्था को दर्शाती है जब θ_E या θ_M का मापन 90° होता है। आप पृष्ठ के एक किनारे के पास दूर स्थित तारकीय पृष्ठभूमि भी देख सकते हैं।

तालिका में दी गयी तिथियों के लिए तारकीय पृष्ठभूमि पर मंगल की प्रक्षेपित (projected) स्थिति को चिन्हित करें। चिन्हित प्रक्षेपित स्थितियों के निकट प्रेक्षण संख्याएँ भी लिखिए। अब पृथ्वी पर स्थित पर्यवेक्षक द्वारा देखी गयी मंगल की गति का वर्णन करें।



6. सई दिसंबर के महीने में उत्तरी ध्रुव पर पर्यवेक्षक है। उत्तर पत्रिका में दी गयी ग्रीड पर:

- (1 mark) दिशाओं को चिन्हित करें।
- (1 mark) ध्रुवतारा (पोलारिस) चिन्हित करें।
- (6 marks) साफ आसमान मानकर एक चंद्र मास में चंद्रमा लगभग कितने दिनों तक दिखाई देगा? यदि आप सटीक गणना कर रहे होते तो आपको किन द्वितीयक प्रभावों को विचार में लेना पड़ता? ऐसे किन्हीं तीन प्रभावों की सूची बनाइए जो आपके उत्तर को एक घंटे या उससे अधिक प्रभावित कर सकते हैं।
- (6 marks) इस माह में पूर्णिमा का चंद्रमा मिथुन राशि में उत्तरायण दिन देखा गया था। सई ने पूरे चंद्र मास के दौरान हर दिन शाम 7 बजे चंद्रमा की स्थिति देखी और उसको सुचीबद्ध किया। उसके द्वारा देखे गए चंद्रमा की अनुमानित स्थितियों को चिन्हित करें एवं हर स्थिति के आगे सूची से उसका अनुक्रमांक लिखें।
- (3 marks) आदर्श, जो सई के साथ उत्तरी ध्रुव पर डेरा डाले हुए हैं, उसने पूर्णिमा के बाद छठे दिन 24 घंटे की अवधि के लिए ने चंद्रमा के आकाशीय भ्रमण का प्रेक्षण किया। आदर्श के प्रेक्षण का वर्णन करें।