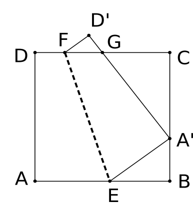
32^{nd} Indian National Mathematical Olympiad-2017

Time: 4 hours **January 15, 2017**

Instructions:

- **Calculators (in any form) and protractors are not allowed.**
- **Rulers and compasses are allowed.**
- **All questions carry equal marks. Maximum marks: 102.**
- **Answer all the questions.**
- **Answer to each question should start on a new page. Clearly indicate the question number.**

1. In the given figure, $ABCD$ is a square sheet of paper. It is folded along EF such that A goes to a point A' different from B and C, on the side BC and D goes to D'. The line $A'D'$ cuts CD in G. Show that the inradius of the triangle GCA' is the sum of the inradii of the triangles $GD'F$ and $A'BE$.



2. Suppose $n \geq 0$ is an integer and all the roots of $x^3 + \alpha x + 4 - (2 \times 2016^n) = 0$ are integers. Find all possible values of α.
3. Find the number of triples (x, a, b) where x is a real number and a, b belong to the set $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ such that
$$x^2 - a\{x\} + b = 0,$$
where $\{x\}$ denotes the fractional part of the real number x. (For example $\{1.1\} = 0.1 = \{-0.9\}$.)
4. Let $ABCDE$ be a convex pentagon in which $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 120^\circ$ and side lengths are five *consecutive integers* in some order. Find all possible values of $AB + BC + CD$.
5. Let ABC be a triangle with $\angle A = 90^\circ$ and $AB < AC$. Let AD be the altitude from A on to BC. Let P, Q and I denote respectively the incentres of triangles ABD, ACD and ABC. Prove that AI is perpendicular to PQ and $AI = PQ$.
6. Let $n \geq 1$ be an integer and consider the sum
$$x = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} 3^k = \binom{n}{0} 2^n + \binom{n}{2} 2^{n-2} \cdot 3 + \binom{n}{4} 2^{n-4} \cdot 3^2 + \cdots \quad .$$
Show that $2x - 1, 2x, 2x + 1$ form the sides of a triangle whose area and inradius are also integers.

————-000000————-

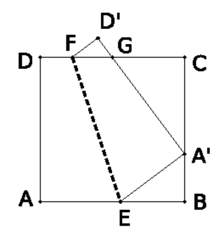
32वाँ भारतीय राष्ट्रीय गणित ओलिंपियाड – 2017

समय: 4 घंटा **जनवरी 15, 2017**

निर्देश :

- किसी भी तरह के गणक (calculators) तथा चांदा (protractors) के प्रयोग की अनुमति नहीं है.
- पैमाना (rulers) तथा परकार (compasses) के प्रयोग की अनुमति है.
- सभी प्रश्नों के अंक एकसमान हैं. अधिकतम अंक : 102.
- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये.
- प्रत्येक प्रश्न का उत्तर नए पेज से प्रारंभ कीजिये. प्रश्न क्रमांक स्पष्ट रूप से इंगित कीजिये.

1. दिए हुए चित्र में $ABCD$ एक वर्गाकार कागज है. इसे EF के परित: इस प्रकार मोड़ा जाता है कि A, बिंदु B तथा C से भिन्न भुजा BC पर बिंदु A' पर आ जाता है तथा D, बिंदु D' पर जाता है. रेखा $A'D'$, CD को G पर काटती है. दिखाईये कि त्रिभुज GCA' की अंत:त्रिज्या त्रिभुजों $GD'F$ तथा $A'BE$ की अंत: त्रिज्याओं के योग के बराबर है.



2. मान लीजिये कि $n \geq 0$ एक पूर्णांक है तथा $x^3 + \alpha x + 4 - (2 \times 2016^n) = 0$ के सभी मूल पूर्णांक हैं. α के सभी संभावित मान ज्ञात कीजिये.
3. उन सभी त्रियुग्मों (x, a, b) की संख्याएं ज्ञात कीजिये जिसमें कि x एक वास्तविक संख्या है तथा a, b समुच्चय $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ से इस प्रकार संबंधित है कि
$$x^2 - a\{x\} + b = 0$$
जहाँ $\{x\}$ वास्तविक संख्या x का भिन्नात्मक भाग है. (उदाहरण के लिए $\{1.1\} = 0.1 = \{-0.9\}$.)
4. मान लीजिये कि $ABCDE$ एक उत्तल पंचभुज (convex pentagon) है जिसमें $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 120°$ है तथा भुजाओं की लम्बाई किसी क्रम में पांच *क्रमागत पूर्णांक* (consecutive integer) हैं. $AB + BC + CD$ के सभी संभव मान ज्ञात कीजिये.
5. मान लीजिये कि ABC एक त्रिभुज है जिसमें $\angle A = 90°$ तथा $AB < AC$. मान लीजिये कि AD, A से BC पर शीर्षलम्ब है. मान लीजिये कि P, Q तथा I क्रमश: त्रिभुज ABD, ACD तथा ABC के अंत:केंद्रों को निरुपित करते हैं. सिद्ध कीजिये कि AI, PQ के लम्बवत है तथा $AI = PQ$.
6. मान लीजिये कि $n \geq 1$ एक पूर्णांक है. निम्न योग पर विचार कीजिये
$$x = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} 3^k = \binom{n}{0} 2^n + \binom{n}{2} 2^{n-2} \cdot 3 + \binom{n}{4} 2^{n-4} \cdot 3^2 + \cdots .$$
दिखाइए कि $2x - 1,\ 2x,\ 2x + 1$ उस त्रिभुज की भुजाओं को बनाते हैं जिसका क्षेत्रफल तथा अंत:त्रिज्या भी एक पूर्णांक हैं.

------------000000-----------