31^{st} राष्ट्रीय गणित ओलिंपियाड – 2016

समय: 4 घंटा **जनवरी 17, 2016**

निर्देश :

- किसी भी तरह के गणक (calculators) तथा चाँदा (protractors) के प्रयोग की अनुमति नहीं है.
- पैमाना (rulers) तथा परकार (compasses) के प्रयोग की अनुमति है.
- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये.
- सभी प्रश्नों के अंक समान हैं. अधिकतम अंक = **100.**
- प्रत्येक प्रश्न का उत्तर नए पेज से प्रारंभ कीजिये. प्रश्न क्रमांक स्पष्ट रूप से इंगित कीजिये.

1. मान लीजिये कि ABC त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$. मान लीजिये कि त्रिभुज का लम्बकेंद्र अंत:वृत्त पर है. AB/BC का अनुपात ज्ञात कीजिये.
2. धनात्मक वास्तविक संख्याओं $a,\ b,\ c$ के लिये निम्न में से किस कथन में $a = b = c$ अनिवार्य रूप से निहित है : (I) $a(b^3 + c^3) = b(c^3 + a^3) = c(a^3 + b^3)$,

   (II) $a(a^3 + b^3) = b(b^3 + c^3) = c(c^3 + a^3)$? अपने उत्तर का उचित कारण बताइए.
3. मान लीजिये कि $\mathbb{N}$ सभी प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को निर्दिष्ट करता है. $T(2k) = k$ तथा $T(2k + 1) = 2k + 2$ के द्वारा एक फलन $T: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ परिभाषित किया गया है. लिखने का एक प्रकार $T^2(n) = T\big(T(n)\big)$ है तथा सामान्य रूप में किसी $k > 1$ के लिए $T^k(n) = T^{k-1}(T(n))$.
   - i) दिखाइये कि प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए k का आस्तित्व इस प्रकार है कि $T^k(n) = 1$.
   - ii) $k \in \mathbb{N}$ के लिए मान लीजिये कि c_k, समुच्चय $\{n: T^k(n) = 1\}$ के तत्वों की संख्या को इंगित करता है. सिद्ध कीजिये कि $k \geq 1$ के लिए, $c_{k+2} = c_{k+1} + c_k$.
4. मान लीजिये कि किसी वृत्त की परिधि के 2016 बिंदु लाल रंग के हैं और बाकि सभी बिंदु नीले रंग के. किसी प्राकृत संख्या $n \geq 3$ के लिए सिद्ध कीजिये कि एक n-भुजाओं वाला बहुभुज है जिसके सभी शीर्ष नीले रंग के हैं.
5. मान लीजिये कि ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle B = 90^\circ$. मान लीजिये कि AC पर एक बिंदु D इस प्रकार है कि त्रिभुज ABD तथा CBD की अंत:त्रिज्याएं बराबर हैं. यदि यह उभयनिष्ठ मान (common value) r' है और r त्रिभुज ABC की अंत:त्रिज्या है तो सिद्ध कीजिये कि
$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{BD}$$
6. एक असतत अंकगणितीय श्रेणी $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$ पर विचार कीजिये. मान लीजिये $p > 1$ तथा $q > 1$ धनात्मक असहभाज्य (relatively prime positive) पूर्णांक इस प्रकार हैं कि $a_1^2,\ a_{p+1}^2$ तथा a_{q+1}^2 भी उसी अंकगणितीय श्रेणी के पद हैं. सिद्ध कीजिये कि अंकगणितीय श्रेणी के सभी पद पूर्णांक हैं.

-----------000000-----------