क्षेत्रीय गणित ओलिंपियाड – 2025

समय: 3 घंटे **नवम्बर 16, 2025**

निर्देश:

- **किसी भी तरह के गणक (calculators) तथा चांदा (protractors) के प्रयोग की अनुमति नहीं है.**
- **पैमाना (rulers) तथा परकार (compasses) के प्रयोग की अनुमति है.**
- **सभी प्रश्नों के अंक समान हैं. अधिकतम अंक : 102.**
- **बिना स्पष्टीकरण के केवल उत्तर बताने पर अंक नहीं दिए जाएंगे.**
- **सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये.**
- **प्रत्येक प्रश्न का उत्तर नए पृष्ठ से प्रारंभ कीजिये. प्रश्न क्रमांक स्पष्ट रूप से इंगित कीजिये.**

1. (a) मान लीजिए कि $n \geq 3$ एक पूर्णांक है। तल में n रेखाओं का ऐसा विन्यास खोजिए जिसमें ठीक–ठीक
   (i) $n-1$ भिन्न प्रतिच्छेदन बिंदु हों;
   (ii) n भिन्न प्रतिच्छेदन बिंदु हों।
   (b) ऐसे n रेखाओं के विन्यास दीजिए जिनमें ठीक $n+1$ भिन्न प्रतिच्छेदन बिंदु हों, (i) $n = 8$ के लिए, तथा (ii) $n = 9$ के लिए।

2. मान लीजिए कि a, b, c भिन्न अशून्य वास्तविक संख्याएँ हैं, जो निम्न शर्त को संतुष्ट करती हैं:
$$a + \frac{2}{b} = b + \frac{2}{c} = c + \frac{2}{a}.$$
   $|a^2b + b^2c + c^2a|$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. मान लीजिए कि Ω और Γ दो वृत्त हैं जिनके केन्द्र क्रमशः O_1 और O_2 हैं। ये दोनों वृत्त दो विभिन्न बिंदुओं A और B पर एक–दूसरे को प्रतिच्छेद (intersect) करते हैं। मान लीजिए कि O_1 वृत्त Γ के बाहर स्थित है और O_2 वृत्त Ω के बाहर स्थित है। एक रेखा ℓ दी गई है जो A तथा B से नहीं गुजरती और जो Ω को P तथा R बिंदुओं पर काटती है, और Γ को Q तथा S बिंदुओं पर काटती है, इस प्रकार कि ये चारों बिंदु P, Q, R, S रेखा ℓ पर इसी क्रम में स्थित हैं। इसके अतिरिक्त, बिंदु O_1 और B रेखा ℓ के एक ही ओर हैं, और बिंदु O_2 तथा A रेखा ℓ के दूसरी ओर हैं। यह ज्ञात है कि बिंदु A, P, Q, O_1 समवृत्तीय (concyclic) हैं, और बिंदु B, R, S, O_2 भी समवृत्तीय हैं। सिद्ध कीजिए कि $AQ = BR$.

4. यह सिद्ध कीजिए कि ऐसी कोई धनात्मक परिमेय संख्याएँ x और y नहीं हैं जिनके लिए
$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2025.$$

5. मान लीजिए कि ABC एक न्यूनकोण त्रिभुज है, जिसमें $AB < AC$ है, तथा उसका लम्बकेन्द्र H और परिवृत्त Ω है। Ω की लघु चाप BC का मध्यबिंदु M है। यदि MH की लंबाई Ω की त्रिज्या के बराबर है, तो यह सिद्ध कीजिए कि $\angle BAC = 60^\circ$.

6. मान लीजिए कि $p(x)$ एक चर बहुपद (nonconstant polynomial) है जिसके गुणांक पूर्णांक हैं, तथा $n \geq 2$ एक पूर्णांक है जिसके लिए श्रेणी
$$p(0),\ p(p(0)),\ p(p(p(0))), \ldots$$
   का कोई पद n से विभाज्य नहीं है। यह सिद्ध कीजिए कि ऐसे पूर्णांक a, b मौजूद हैं जिनके लिए
   $0 \leq a < b \leq n-1$ और n, $\big(p(b) - p(a)\big)$ को विभाजित करता है।

---------00000---------